Extrusie

7. De omtrek van de grote opening is k keer zo groot als de omtrek van de kleine opening, en de oppervlakte van de grote opening is k^2 keer zo groot als de omtrek van de kleine opening. De wortel van de oppervlakte van de grote opening is dus $\sqrt{k^2} = k$ keer zo groot als de wortel van de oppervlakte van de kleine opening. Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus voor beide openingen gelijk, aangezien P en $\sqrt{A}$ allebei k keer zo groot zijn voor de grote opening.

8. Eerst reken je de omtrek van de opening uit. De onderkant is 4 cm lang, en de voor de lengte van de formule gebruik je de formule:

$$\text{lengte kromme van } a \text{ tot } b = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Voor je deze formule kunt gebruiken moet je dus eerst $y'(x)$ uitrekenen. $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$, dus $y' = -\frac{3}{2}x$. Als je dit invult krijg je dat de lengte van de kromme gelijk is aan

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}x\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Helaas kun je deze integraal niet uitrekenen, dus dit zal je met de rekenmachine moeten doen. Je vult op de Ti-84 plus de volgende formule in:

$$y_1 = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}x\right)^2}.$$

Nu gebruik je calc $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ met de grenzen -2 en 2 om de integraal uit te rekenen. Je vindt dan $7,54$ cm. Samen met de onderkant geldt dus $P \approx 7,54 + 4 \approx 11,54$ cm. Nu moet je nog de oppervlakte uitrekenen. De oppervlakte is gelijk aan de volgende integraal:

$$A = \int_{-2}^{2} 3 - \frac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}x.$$

Deze integraal kun je uitrekenen met de rekenmachine, maar dit heb ik bij het berekenen van P al uitgelegd, dus deze integraal doe ik met de hand:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} 3 - \frac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}x,\\
&= \left[3x - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{2},\\
&= \left(3 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^3\right) - \left(3 \cdot -2 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^3\right),\\
&= 8\,\text{cm}.
\end{aligned}$$

Nu kun je de het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ uitrekenen. Dit is

$$\frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{11,54}{\sqrt{8}} \approx 4,1.$$

9. De omtrek P van een rechthoek van 1 bij x is $2 + 2x$. De oppervlakte A van zo'n rechthoek is x. Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus:

$$\frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{2+2x}{\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Deze laatste vorm is nuttig als je het minimum wilt vinden. Je zoekt dan voor welke x de afgeleide van bovenstaande functie nul is:

$$\begin{aligned}
\left(2x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)' &= 0,\\
-x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} &= 0,\\
-\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} &= 0,\\
-1 + x &= 0,\\
x &= 1.
\end{aligned}$$

De x-coördinaat van de top is dus 1.