

Raakcirkels aan een lijn

4. Ik zal eerst schetsen hoe je ongeveer te werk gaat bij het maken van een bewijs, en daarna zal ik het tot in detail beschrijven. Wat je in feite gaat doen is eerst bewijzen dat driehoeken $\triangle RGF$ en $\triangle SHF$ gelijkvormig zijn, vervolgens merk je op dat aangezien $FH = 2FG$ vanwege de gelijkvormigheid moet gelden dat $FS = 2FR$, en daar volgt gelijk weer uit dat $FR = RS$. Nu hoe je bewijs er in detail uit gaat zien:

Omdat $\angle GFR = \angle HFR$ en omdat $\angle RGF = \angle SHF$ geldt $\triangle RGF \sim \triangle SHF$. Hieruit volgt omdat $FH = 2FG$ gelijk dat $FS = 2FR$, en dit betekent dat $FR = RS$.

5. Je ziet dat MR loodrecht op k staat, aangezien de cirkel waarvan M het middelpunt is raakt aan k . Nu weet je ook dat k evenwijdig is aan m , en dat vanwege de gegeven gelijkvormigheid XS evenwijdig moet zijn aan MR . Het uiteindelijke bewijs ziet er als volgt uit:

Vanwege de gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle FXS$ en $\triangle FMR$ geldt dat XS evenwijdig is aan MR . MR op zijn beurt staat loodrecht op k , omdat M het middelpunt is van een cirkel die k raakt in het punt R . k is weer evenwijdig aan m , dus XS staat loodrecht op m .

6. De definitie van een parabool is dat voor elk punt op de parabool de afstand tot het brandpunt gelijk is aan de afstand tot de richtlijn. Nu weet je uit de vorige opgave dat XS loodrecht op m staat, dus XS is de afstand tot de richtlijn m . Je weet ook dat $\triangle FXS$ gelijkvormig is met $\triangle FMR$, dus als XS inderdaad gelijk is aan XF dan moet ook MR gelijk zijn aan MF , en daarvan weet je dat het waar is aangezien zowel MR als MF de straal van de cirkel zijn. Nu heb ik min of meer van het eind naar het begin geredeneerd, en een bewijs moet altijd van begin naar eind gaan, dus hier is het uiteindelijke bewijs:

Omdat $MR = MF$ en omdat $\triangle FXS \sim \triangle FMR$ geldt dat $FX = FS$, en omdat XS loodrecht op m staat is de afstand van het punt X tot de lijn m gelijk aan XS en dus gelijk aan XF , ofwel de afstand tot het punt F . Volgens de definitie van een parabool ligt het punt X dus inderdaad op een parabool met brandpunt F en richtlijn m .