Tussen twee grafieken

1. Er wordt hier gevraagd naar de x-waarde waarvoor $f(x) = p$. Je moet dus de volgende vergelijking oplossen:

$$\sqrt{1-x} = p.$$

Je begint door aan beide kanten te kwadrateren, en daarna ben je al bijna klaar:

$$\begin{aligned} 1 - x &= p^2, \\ -x &= p^2 - 1, \\ x &= 1 - p^2. \end{aligned}$$

De x-coördinaat van Q is dus inderdaad $1 - p^2$.

2. De breedte van de rechthoek is de x-coördinaat van Q min de x-coördinaat van P, oftewel $1-p^2-p$. De hoogte van de rechthoek is p. De oppervlakte van de rechthoek is dus $p - p^3 - p^2$. Nu wil je weten voor welke p deze oppervlakte maximaal is. Hiervoor moet je weten wanneer de afgeleide van de oppervlakte nul is:

$$\begin{aligned} \left(p - p^3 - p^2\right)' &= 0, \\ 1 - 3p^2 - 2p &= 0, \\ p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{3} &= 0, \\ (p+1)\left(p - \frac{1}{3}\right) &= 0, \\ p = -1 \bigvee p &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aangezien we op het interval $[0, 1]$ kijken is alleen de oplossing $p = \frac{1}{3}$ geldig.

3. De inhoud I is gelijk aan de inhoud van het omwentelingslichaam van f van $x = 0$ tot $x = \frac{1}{2}$ min de inhoud van het omwentelingslichaam van de lijn $y = x$ van $x = 0$ tot $x = \frac{1}{2}$, oftewel:

$$I = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \, \mathrm{d}x$$

Nu vul je de formule voor f in en bereken je de primitieve.

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - x \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \, \mathrm{d}x, \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} - \pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - 0 + 0 - \frac{\pi}{24} + 0, \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$