© havovwo.nl

# Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

11. Je ziet in de figuur dat de lengte van het lijnstuk gelijk is aan $f - g$. Je moet dus de vergelijking $f - g = \frac{1}{6}$ oplossen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{6}, \\
x - 1 &= \frac{1}{6}x^2, \\
\frac{1}{6}x^2 - x + 1 &= 0, \\
x = \frac{1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{6}} &\bigvee x = \frac{1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{6}}, \\
x = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} &\bigvee x = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}, \\
x = 3 + 3\sqrt{\frac{1}{3}} &\bigvee x = 3 - 3\sqrt{\frac{1}{3}}, \\
x = 3 + \sqrt{3} &\bigvee x = 3 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Dit zijn dus de waarden voor $a = x$ waarvoor aan de voorwaarde voldaan is.

12. De lengte van het lijnstuk is $\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}$. Je wilt eerst uitrekenen voor welke $b$ de lengte maximaal is. Hiervoor moet je de afgeleide van het lijnstuk gelijkstellen aan nul:

$$\begin{aligned}
\left(b^{-1} - b^{-\frac{1}{2}}\right)' &= 0, \\
-b^{-2} + \frac{1}{2}b^{-\frac{3}{2}} &= 0, \\
-1 + \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}} &= 0, \\
\frac{1}{2}\sqrt{b} &= 1, \\
\sqrt{b} &= 2, \\
b &= 4.
\end{aligned}$$

Nu vul je $b = 4$ in in de formule voor de lengte. Dan krijg je dat de maximale lengte gelijk is aan:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.$$

Natuurlijk is een negatieve lengte onzin, maar dit komt doordat ik aan het begin heb gezegd dat de lengte $\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}$ is, maar ik had natuurlijk ook kunnen kiezen dat het $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$ is, en daar komt de min vandaan. De lengte is dus $\frac{1}{4}$.

© havovwo.nl

13. Eerst moet je de $x$-coördinaten van de snijpunten van de lijn $y = 4$ met $f$ en $g$ uitrekenen. Met $f$ is het snijpunt:

$$\frac{1}{x} = 4,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Met $g$ is het snijpunt:

$$\frac{1}{x^2} = 4,$$
$$x^2 = \frac{1}{4},$$
$$x = \frac{1}{2}.$$

De negatieve oplossing van de laatste vergelijking kan genegeerd worden omdat het vlakdeel $V$ toch in zijn geheel rechts van de $y$-as ligt. Nu deel je het vlakdeel $V$ op in twee stukken, en de grens tussen de stukken is de lijn $x = \frac{1}{2}$. Links van die lijn wordt $V$ namelijk van boven begrensd door de lijn $y = 4$, en rechts van de lijn wordt hij van boven begrensd door $g$. De oppervlakte van het linkerdeel is dan gegeven door

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 4 - f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voor de oppervlakte van het rechterdeel moet je ook nog het snijpunt van $f$ en $g$ weten. Dit is:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2},$$
$$x = 1.$$

Het rechterdeel heeft dan als oppervlakte

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De totale oppervlakte van $V$ is dus:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 4 - f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 4 - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\\
&= [4x - \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{x} - \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1},\\
&= \left(4 \cdot \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) - \left(4 \cdot \frac{1}{4} - \ln\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{1} - \ln 1\right) - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} - \ln\frac{1}{2}\right),\\
&= 2 - \ln\frac{1}{2} - 1 + \ln\frac{1}{4} - 1 - \ln 1 + 2 + \ln\frac{1}{2},\\
&= 2 + \ln\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$