

Een symmetrische gebroken functie

1. Je moet de volgende ongelijkheid oplossen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+e^x} &< \frac{1}{100}, \\ 200 &< 1+e^x, \\ e^x &> 199, \\ x &> \ln 199.\end{aligned}$$

Let bij de eerste stap goed op welke kant nu groter is.

2. Als $F(x)$ een primitieve is van $f(x)$ dan is $f(x)$ de afgeleide van $F(x)$, dus eerst bereken je de afgeleide van $F(x)$. Hierbij moet je de kettingregel toepassen voor wat er binnen de ln staat.

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2 - \frac{2}{1+e^x} \cdot e^x, \\ &= \frac{2+2e^x}{1+e^x} - \frac{2e^x}{1+e^x}, \\ &= \frac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x}, \\ &= \frac{2}{1+e^x}, \\ &= f(x).\end{aligned}$$

$F(x)$ is dus inderdaad een primitieve van $f(x)$.

3. Het vlakdeel V is gelijk aan de integraal van $f(x)$, met als grenzen $x = 0$ en $x = \ln 3$. De primitieve van $f(x)$ heb je al, dus het antwoord wordt:

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\ln 3} f(x) \, dx, \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{2}{1+e^x} \, dx, \\ &= [2x - 2 \ln(1+e^x)]_0^{\ln 3}, \\ &= (2 \ln 3 - 2 \ln(1+e^{\ln 3})) - (2 \cdot 0 - 2 \ln(1+e^0)), \\ &= (2 \ln 3 - 2 \ln(1+3)) - (-2 \ln(1+1)), \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 2, \\ &= \ln 3^2 - \ln 4^2 + \ln 2^2, \\ &= \ln 9 - \ln 16 + \ln 4, \\ &= \ln \left(\frac{9 \cdot 4}{16} \right), \\ &= \ln \left(\frac{9}{4} \right).\end{aligned}$$

Hier heb ik op het laatst gebruik gemaakt van de rekenregels $a \ln b = \ln b^a$, $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ en $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

4. $f(-x)$ is gelijk aan $\frac{2}{1+e^{-x}}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) + f(-x)}{2} &= \frac{\frac{2}{1+e^x} + \frac{2}{1+e^{-x}}}{2}, \\
 &= \frac{\frac{2 \cdot (1+e^{-x})}{(1+e^x) \cdot (1+e^{-x})} + \frac{2 \cdot (1+e^x)}{(1+e^x) \cdot (1+e^{-x})}}{2}, \\
 &= \frac{2 \cdot (1+e^{-x}) + 2 \cdot (1+e^x)}{(1+e^x) \cdot (1+e^{-x})}, \\
 &= \frac{2+2e^{-x} + 2+2e^x}{1+e^{-x} + e^x + e^{x-x}}, \\
 &= \frac{4+2e^{-x} + 2e^x}{2+e^{-x} + e^x}, \\
 &= \frac{2(2+e^{-x} + e^x)}{2+e^{-x} + e^x}, \\
 &= \frac{2}{2}, \\
 &= \frac{2}{2}, \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Hier heb ik eerst de noemers van de breuken gelijk gemaakt zodat ik ze kon optellen.