Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$
$$\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Een symmetrische gebroken functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

3p **1** Bereken exact voor welke waarden van x geldt: $f(x) < \frac{1}{100}$.

$F(x) = 2x - 2\ln(1+\mathrm{e}^x)$ is een primitieve van $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

4p **2** Toon dit aan.

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as, de x-as en de lijn $x = \ln 3$.

5p **3** Bereken exact de oppervlakte van V en schrijf je antwoord in de vorm $\ln k$.

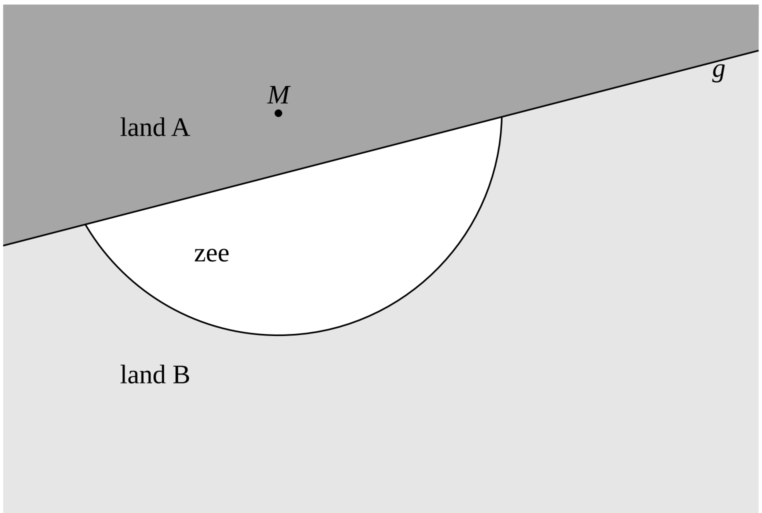
Voor elke waarde van x geldt: $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$.

5p **4** Toon dit aan.

Gelijke afstanden

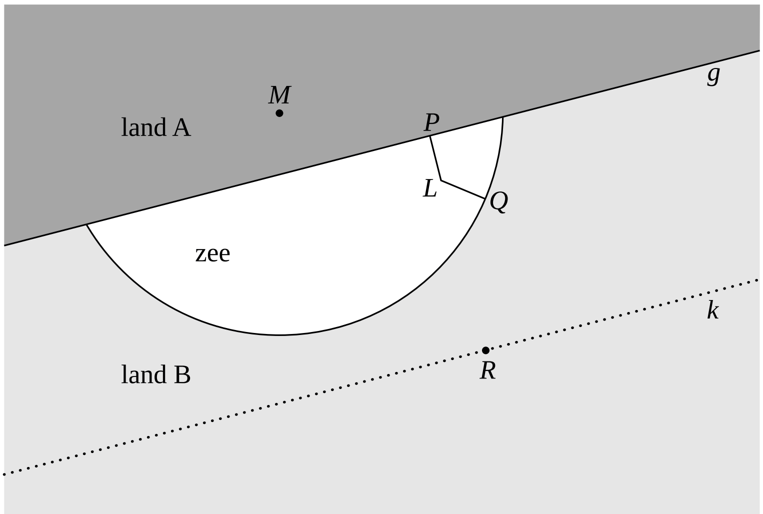
Tussen de landen A en B ligt een zee die begrensd is door een cirkelboog en een deel van lijn g. Het punt M is het middelpunt van de cirkelboog. Zie figuur 1.

figuur 1



We bekijken de punten in de zee die op gelijke afstand van beide oevers liggen. In figuur 2 is zo'n punt L getekend: de afstand LP van punt L tot land A is gelijk aan de afstand LQ van punt L tot land B. Hierin is P de loodrechte projectie van L op g en is Q het snijpunt van de lijn door M en L met de cirkelboog.

figuur 2



Om de ligging van punt L te onderzoeken, is in figuur 2 een hulplijn k getekend evenwijdig aan lijn g. De afstand tussen de twee evenwijdige lijnen is gelijk aan de straal van de cirkelboog met middelpunt M.
Punt R is de loodrechte projectie van L op k. Dus L ligt op PR en de lengte van PR is de afstand tussen g en k.

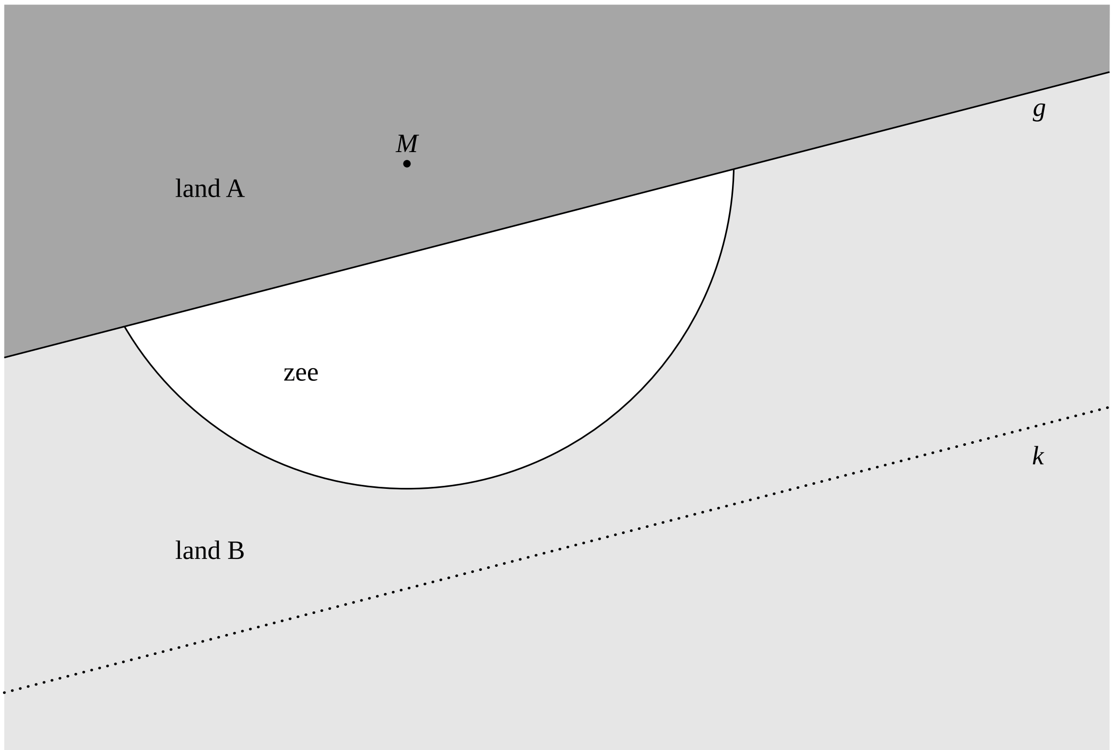
Er geldt: L ligt op de middelloodlijn van MR.

4p **5** Bewijs dit.

4p **6** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de meetkundige plaats van alle punten in de zee die op gelijke afstand van beide oevers liggen. Licht je werkwijze toe.

uitwerkbijlage

6



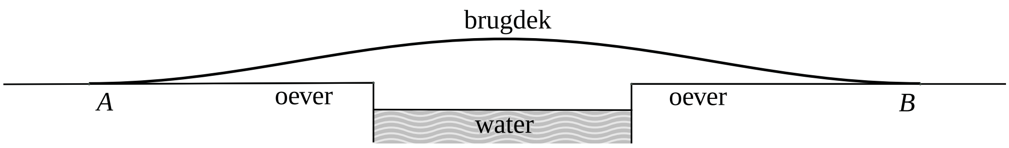
Het ontwerp van een brug

Een gemeente wil in een park een brug over een vijver aanleggen.
De brug moet:

1 minstens 8,00 meter overspannen (de breedte van de vijver),
2 als zijaanzicht de vorm van een sinusoïde hebben (om esthetische redenen),
3 horizontaal aansluiten op beide oevers (de oevers liggen even hoog),
4 een hoogste punt van 1,00 m boven het wateroppervlak hebben (om roeiboten eronderdoor te kunnen laten varen); het water staat 0,20 m onder het niveau van de beide oevers,
5 maximaal een helling $\frac{1}{15}$ hebben (voor mensen in een rolstoel).

In figuur 1 staat een schets van een zijaanzicht van de situatie, waarbij de punten waarin de brug horizontaal aansluit op beide oevers steeds A en B genoemd worden. De tekening is niet op schaal.

figuur 1



In dit zijaanzicht kiezen we een assenstelsel waarin de x-as op de hoogte van beide oevers ligt en de y-as door het hoogste punt van de brug gaat. We kiezen zowel op de x-as als op de y-as de meter als eenheid. Het zijaanzicht kan nu door een vergelijking in x en y beschreven worden.
Een vergelijking van de vorm $y = 0,40\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right)\right)$, met x en y in meters, p positief en x binnen een geschikt interval, voldoet aan de eisen 2, 3 en 4. Hierbij is de dikte van het brugdek verwaarloosd.

Afhankelijk van de waarde van p is ook aan eis 1 voldaan.

2p **7** Bepaal voor welke waarden van p aan eis 1 is voldaan.

Als aan eis 1 is voldaan, betekent dat nog niet dat is voldaan aan eis 5. Zo is bijvoorbeeld voor $p = 10,00$ wel aan eis 1 voldaan, maar niet aan eis 5.

5p **8** Bepaal voor welke waarden van p aan eis 5 is voldaan.

Men kiest voor het zijaanzicht van de brug de vergelijking met $p = 40,00$.
Deze vergelijking is te schrijven als:

$$y = 0,40\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{20,00}x\right)\right)$$

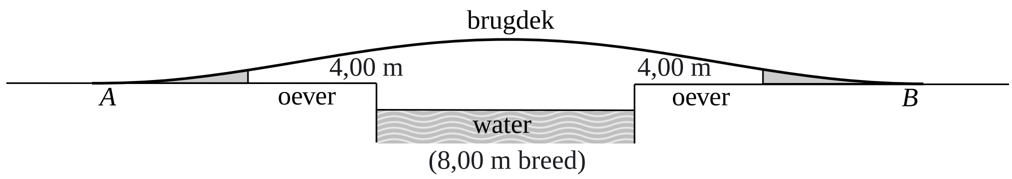
De horizontaal gemeten afstand tussen A en B is in dit geval 40,00 meter, zodat aan eis 1 is voldaan. Met de gekozen vergelijking is ook aan de vier andere eisen voldaan.

De lengte van het brugdek blijkt bij deze keuze niet veel groter te zijn dan de horizontaal gemeten afstand tussen A en B.

4p **9** Bereken de lengte van het brugdek. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Het brugdek wordt 3,50 m breed. De uiteinden van de brug wil men ondersteunen door aan beide zijden, over de hele breedte van het brugdek, beton te storten. De betonnen gedeelten (met verticale wanden) beginnen op een afstand van 4,00 meter vanaf de rand van de vijver. In figuur 2 zijn in een schets van een zijaanzicht beide delen van de betonnen ondersteuning met grijs aangegeven. De tekening is niet op schaal.

figuur 2



5p **10** Bereken hoeveel kubieke meter beton voor de betonnen ondersteuning nodig is.

Verticale en horizontale verbindingslijnstukken

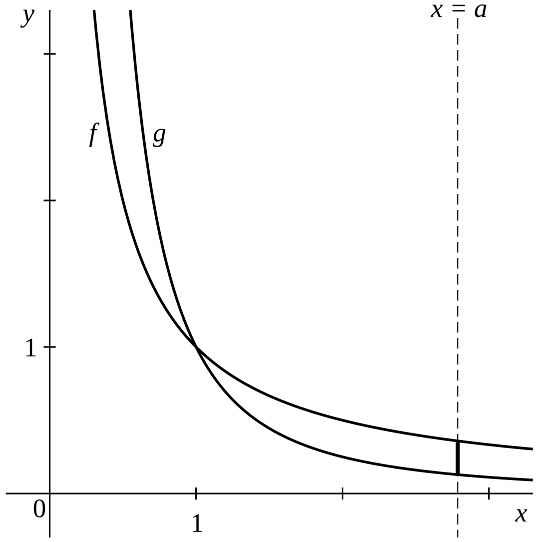
De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\frac{1}{x}$ en $g(x)=\frac{1}{x^2}$ met $x>0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt (1, 1).

Voor $a>1$ bekijken we bij $x=a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie figuur 1.

5p **11** Bereken op algebraïsche wijze de exacte waarden van a waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

figuur 1

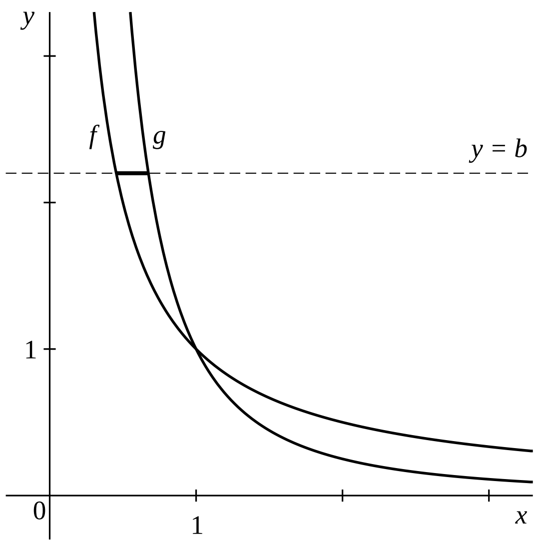


Voor $b>1$ bekijken we bij $y=b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g. Zie figuur 2.
De x-coördinaten van de eindpunten van dit verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Voor een zekere waarde van b is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

6p **12** Bereken met behulp van differentiëren de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.

figuur 2

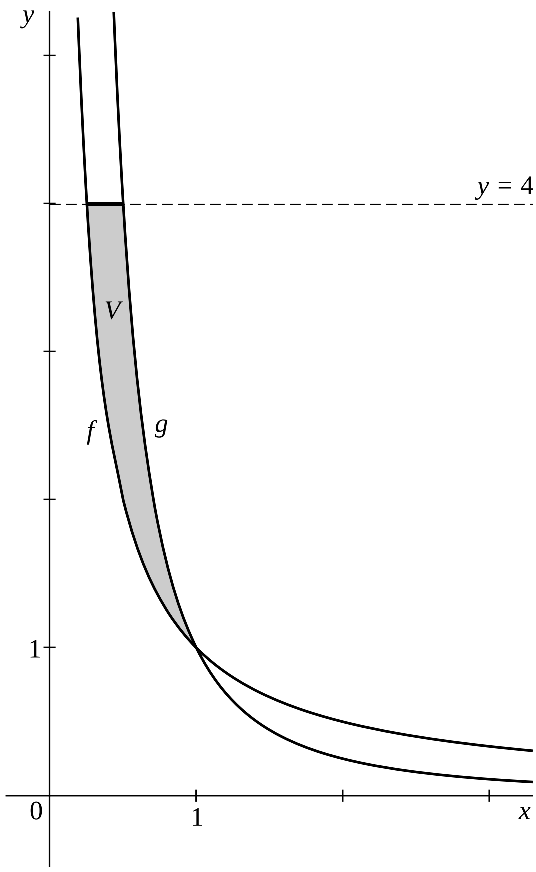


Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y = 4$.

Zie figuur 3.

7p **13** Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

figuur 3



Het midden van een koorde

Gegeven is een cirkel met middelpunt M.
Punt C ligt binnen de cirkel. C is niet gelijk aan M.
PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.

3p **14** Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

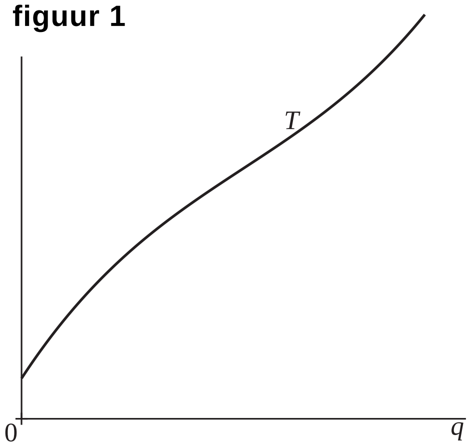
- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.
  In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$
- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden berekend met de formule $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$, met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

4p **15** Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. In figuur 1 is deze situatie weergegeven.

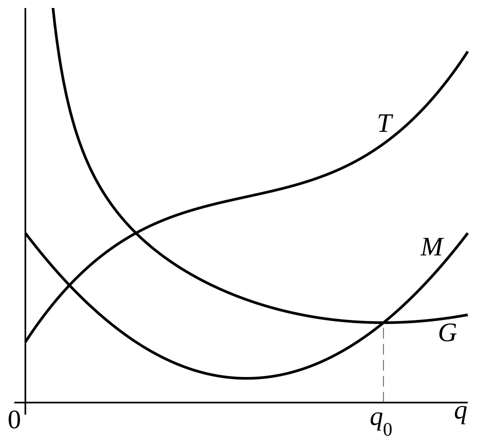
figuur 1



Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden: $a > 0$, $c > 0$ en $d > 0$.
Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

5p **16** Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

figuur 2



In figuur 2 is de grafiek van een willekeurige totale kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken.
Ook zijn in figuur 2 de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.
Verder is in figuur 2 aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$

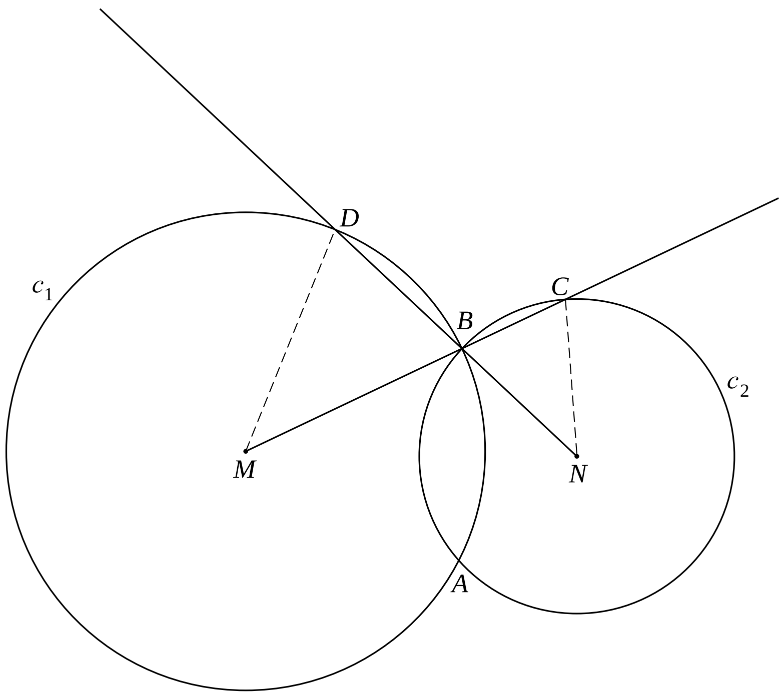
Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

4p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Twee snijdende cirkels

Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B.
Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D.
Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



4p **18** Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

uitwerkbijlage

18