

Wisselingen in rijtjes kop en munt

Het komt wel eens voor dat onderzoeksresultaten vervalst worden om gewenste uitkomsten te krijgen. In deze opgave bekijken we een wiskundige techniek om zulke fraude te achterhalen. Deze techniek is erop gebaseerd dat het verdacht is als in rijtjes onafhankelijke waarnemingen te veel afwisseling voorkomt. We demonstreren deze techniek aan de hand van een sterk vereenvoudigde situatie: het meerdere keren werpen van een muntstuk.

We werpen vier keer een zuiver muntstuk en noteren de rij uitkomsten kop (K) of munt (M). We kijken naar **het aantal wisselingen** in zo'n rijtje. Zo heeft bijvoorbeeld het rijtje MKMM twee wisselingen en het rijtje KKKK nul wisselingen.

- 4p 1 Toon aan dat bij vier keer werpen de verwachtingswaarde van het aantal wisselingen $1\frac{1}{2}$ is.

We werpen tien keer een zuiver muntstuk en noteren de rij uitkomsten:

$\overset{1}{\otimes} - \overset{2}{\otimes} - \overset{3}{\otimes} - \overset{4}{\otimes} - \overset{5}{\otimes} - \overset{6}{\otimes} - \overset{7}{\otimes} - \overset{8}{\otimes} - \overset{9}{\otimes} - \otimes$

Hierin stelt \otimes telkens kop (K) of munt (M) voor. De negen plekken waar een wisseling kan optreden, zijn genummerd.

- 3p 2 Toon aan dat er 252 verschillende rijtjes van tien worpen zijn met precies 5 wisselingen.

In onderstaande tabel staan de kansen op de verschillende aantallen wisselingen bij tien keer werpen van een muntstuk.

aantal wisselingen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
kans	$\frac{2}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{2}{1024}$

Jolly moet tien keer een muntstuk werpen, het verkregen rijtje noteren en de wisselingen tellen. Dit saaie werk moet zij 20 keer doen.

- 3p 3 Bereken de kans dat de 20 rijtjes allemaal ten minste één wisseling hebben.

Hieronder staan de rijtjes die Jolly heeft opgeschreven met achter elk rijtje het aantal wisselingen.

KMKKMMM KMM 5	KKMKMMM KKK 4	MMM KMKMM KM 6	KMKMKKKKMK 6	MMKKKMMMMK 3
MMM KMKMMM 4	MKMMM KKKMM 4	MKKKMMMMKM 4	KMKKMMKKMM 5	MMMMKKKKKK 1
MMKKKKKMMM 2	MMKMKMKMK 7	KMKKMKMMKK 6	MMM KMMMMK 3	KMMKMMKKMK 6
KKKMKMKMK 6	MKMKMKMMK 7	KKKKMKMMM 3	KKMKMKMMKK 6	MKMKMMKKKM 6

We vragen ons af of Jolly wel echt met een muntstuk heeft geworpen. Zij heeft namelijk 9 rijtjes met meer dan 5 wisselingen genoteerd.

Als iemand echt met een muntstuk werpt, is de kans op 9 of meer rijtjes met meer dan 5 wisselingen nogal klein. Als die kans kleiner dan 5% is, vertrouwen we Jolly niet en verdenken we haar ervan dat zij - zonder echt met een muntstuk te werpen - zomaar wat K-M-rijtjes heeft opgeschreven.

5p 4 Is er voldoende aanleiding om Jolly niet te vertrouwen? Licht je antwoord toe.