Een geodriehoek

17. Bij bewijsopgaven is het altijd handig om even de eigenschappen van het object waar het om gaat op te schrijven, in dit geval dus een koordenvierhoek. Een belangrijke eigenschap van een koordenvierhoek is dat over- staande hoeken bij elkaar opgeteld 180^o zijn. Als je dus bijvoorbeeld zou kunnen aantonen dat ∠ACE = $180^o - 45^o$, dan heb je de opgave opgelost. Dit zou je weer kunnen aantonen door aan te tonen dat ∠ACB = 45^o . In dat geval is de som van ∠ ACB en ∠ ACE namelijk 180^o , zoals moet gelden voor een gestrekte hoek. Aantonen dat ∠ ACB = 45^o is eenvoudig, omdat ΔABC een gelijkbenige driehoek is waarvan één van de hoeken gelijk is aan 90^o .
Wat ik tot nu toe heb opgeschreven is het gedachteproces dat je doorloopt als je deze som oplost. Zoals je ziet begin ik met redeneren bij de oplossing, en ga ik steeds een stapje terug om te kijken wat ik moet bewijzen om de vorige stap te kunnen bewijzen. In mijn ervaring is dit een snelle manier om de oplossing te vinden. Als je er op deze manier niet uitkomt, kun je altijd nog kijken wat voor informatie is gegeven, en kijken wat je met behulp van die informatie kunt bewijzen. Op deze manier loop je echter het risico dat je dingen bewijst die je uiteindelijk niet nodig blijkt te hebben, en dit kost je tijd. Als je zover bent gekomen dat je weet hoe je de stelling kunt bewijzen moet je nog het bewijs netjes opschrijven. In een net bewijs begin je bij wat je weet, en werk je van daaruit naar de oplossing toe. In dit geval hoef ik dus eigenlijk alleen maar mijn redener- ing van net in omgekeerde volgorde op te schrijven, en ik moet natuurlijk de stapjes wat uitgebreider opschrijven. Dan krijg je zoiets als dit: Driehoek ΔABC is een gelijkbenige driehoek, omdat AB = BC . Dit betekent dat ∠ BAC = ∠ BCA. Omdat de som van de hoeken van een driehoek 180^o moet zijn, en omdat ∠ ABC = 90^o kun je ∠BCA uitrekenen.

$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^o$

$\angle ABC + 2 \angle BCA = 180^o$

$90^o + 2\angle BCA = 180^o$

$2\angle BCA = 90^o$

$\angle BCA = 45^o$

Vervolgens kun je AC E uitrekenen met het feit dat BC E een gestrekte hoek is. Er geldt namelijk:

$\angle BCA + \angle ACE = 180^o$

$45^o + \angle ACE = 180^o$

$\angle ACE = 135^o$

Nu reken je de som van $\angle$ ACE en $\angle$ ADE uit. Hierbij gebruik je het gegeven dat $\angle$ ADE = 45^o . Deze som is gelijk aan $45^o + 135^o = 180^o$. Bij een koordenvierhoek is de som van tegenoverliggende hoeken altijd 180^o , dus AC ED is een koordenvierhoek. q.e.d.

18. Hier ga je weer op dezelfde manier te werk als bij de vorige opgave. Eerst schrijf je nog even de eigenschappen van een geodriehoek op. Een geodriehoek is gelijkbenig, en de tophoek van de driehoek is 90^o . Nu is een van de hoeken van de driehoek al gegeven. ADE is namelijk 45^o . Als je nu zou bewijzen dat
$\angle$ AED = 90^o , moet de overgebleven hoek automatisch 45^o zijn, en is de stelling dus bewezen. Om dit te bewijzen kun je gebruik maken van het feit dat AC ED een koordenvierhoek is. Dit betekent namelijk dat A, C , E en D op een cirkel liggen. Nu kun je met de stelling van de constante hoek bewijzen dat $\angle$ ACD = AED = 90^o . Nu moet je het nog netjes opschrijven. Je krijgt dan dit:
AC ED is een koordenvierhoek. Dit betekent dat je een cirkel door de punten A, C , E en D kunt tekenen. Hoeken $\angle$ ACD en $\angle$ AED staan beiden op koorde AD. Dan zegt de stelling van de constante hoek dat deze hoeken gelijk zijn. $\angle$ ACD is een rechte hoek, dus moet $\angle$ AED dat ook zijn. ΔAED heeft dus een rechte hoek.
Een van de andere hoeken in ΔAED is gelijk aan 45^o . Vanwege het feit dat de hoekensom van een driehoek altijd gelijk is aan 180^o moet de overgebleven hoek dus gelijk zijn aan $180^o - 90^o - 45^o = 45^o$. De driehoek heeft dus twee gelijke hoeken, en is dus gelijkbenig. Deze twee dingen, de gelijkbenigheid, en het feit dat de overgebleven hoek recht is, maken ΔAED een geodriehoek.