Gelijke oppervlakken

1. Om het snijpunt van de parabool en de lijn te vinden moet je de volgende vergelijking oplossen:

$$4x - x^2 = ax$$

Dit is gewoon een kwadratische vergelijking, en de oplossing vind je als volgt:

$$(4 - a)x - x^2 = 0$$
$$x(4 - a - x) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4 - a$$

De oplossing $x = 0$ is het snijpunt in de oorsprong, maar waar naar gevraagd wordt is het andere snijpunt: $x = 4 - a$. Je hoeft nu alleen nog maar de y-coördinaat van dit snijpunt uit te rekenen. Dit kan door $x = 4 - a$ in te vullen in één van de twee gegeven formules. Ik kies voor de vergelijking $y = ax$. Dan krijg je:

$$y = a(4 - a) = 4a - a^2$$

Nu heb je de x- en de y-coördinaat van snijpunt A, namelijk $(4-a, 4a-a^2)$.

2. De gevraagde oppervlakte is gelijk aan de integraal van het verschil van de parabool min de lijn, geïntegreerd van 0 tot het snijpunt A, ofwel tot $x = 4 - a$.
In formulevorm:

$$V = \int_0^{4-a} (4x - x^2 - ax)\,dx$$

Nu hoef je alleen nog deze integraal uit te rekenen.

$$V = \left[\tfrac{4}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}ax^2\right]_0^{4-a}$$

$$V = \left(\tfrac{4}{2}\cdot 0^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3 - \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot 0^2\right) - \left(\tfrac{4}{2}\cdot(4-a)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(4-a)^3 - \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot(4-a)^2\right)$$

$$V = 2\cdot(4-a)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(4-a)^3 - \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot(4-a)^2$$

Nu moet je je antwoord nog herleiden tot de gevraagde vorm. De tweede term ziet eruit alsof er niets aan gedaan hoeft te worden, dus daar doe je niets mee. De eerste en de derde term neem je samen.

$$V = -\tfrac{1}{3} \cdot (4-a)^3 + (2 - \tfrac{1}{2}a)(4-a)^2$$
$$V = -\tfrac{1}{3} \cdot (4-a)^3 + \tfrac{1}{2}(4-a)(4-a)^2 = -\tfrac{1}{3} \cdot (4-a)^3 + \tfrac{1}{2}(4-a)^3$$
$$V = \tfrac{1}{6}(4-a)^3$$

Dit is de gevraagde vorm.

3. Eerst reken je uit wat de oppervlakte onder de parabool is. Nu kun je dit gaan uitrekenen door te integreren, maar in feite heb je het al uitgerekend. Als je namelijk in de formule die je in de vorige som hebt aangetoond invult dat a = 0, dan krijg je de oppervlakte onder de parabool. Deze oppervlakte is dus:

$$A = {}^{1}/_{6} \cdot (4-0)^3 = {}^{32}/_{3}$$

Nu moet deze oppervlakte gelijk zijn aan tweemaal oppervlakte V . De oppervlakte V heb je in de vorige som uitgerekend in termen van a. Je krijgt dus de volgende vergelijking:

$$2 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot (4-a)^3 = \tfrac{32}{3}$$

$$(4-a)^3 = 32 \quad \rightarrow \quad 4-a = \sqrt[3]{32} \quad \rightarrow \quad a = 4 - \sqrt[3]{32}$$