

Rechthoeken bij een kwartcirkel

15. De oppervlakte van rechthoek 1 is gelijk aan $ON \cdot OQ$, oftewel:

$$V(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t) \cdot \sin t$$

De oppervlakte van rechthoek 2 is gelijk aan $RA \cdot RS$, oftewel:

$$W(t) = (1 - \cos t) \cdot \frac{1}{2} \sin t$$

Nu moet je de vergelijking $V(t) = 3 \cdot W(t)$ oplossen, oftewel $\frac{V(t)}{W(t)} = 3$.

$$\frac{\frac{1}{2}(1 + \cos t) \cdot \sin t}{(1 - \cos t) \cdot \frac{1}{2} \sin t} = 3$$

$$\frac{(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)} = 3$$

$$1 + \cos t = 3 - 3 \cos t$$

$$4 \cos t = 2$$

$$\cos t = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi$$

16. Eerst vul je de formules voor ON , OQ , RS en RA in in de volgende formule:

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$$

Je krijgt dan:

$$\frac{\frac{1}{2}(1 + \cos t)}{\sin t} = \frac{\frac{1}{2} \sin t}{1 - \cos t}$$

Dit moet je dus aantonen. Als je deze formule nu kunt omschrijven tot een formule die altijd waar is, heb je de opgave bewezen. Je begint met het wegdelen van de breuk.

$$\frac{1}{2}(1 + \cos t) \cdot (1 - \cos t) = \frac{1}{2} \sin t \cdot \sin t$$

$$1 - \cos^2 t + 1 \cdot \cos t - \cos t \cdot 1 = \sin^2 t$$

$$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

$$1 = \sin^2 t + \cos^2 t$$

Deze laatste formule is altijd waar, onafhankelijk van de waarde van t . Dit bewijst dus de opgave.

Eindexamen wiskunde B vwo 2010 - II

© havovwo.nl

17. Hier vul je, net als in de vorige opgave, de formules voor de zijden in in de volgende formule:

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$$

Je krijgt dan:

$$\frac{\frac{1}{2}(1 + \cos t)}{\sin t} = \frac{1 - \cos t}{\frac{1}{2} \sin t}$$

Nu wil je deze vergelijking oplossen voor t . Als je dit hebt, kun je deze t invoeren in de formules voor de lengtes van de zijden. Aan beide kanten kun je $\sin t$ onder de streep weghalen, op voorwaarde dan $\sin t \neq 0$. Dit is het geval, want t is groter dan 0 en kleiner dan $\frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{1}{2}(1 + \cos t) = 2(1 - \cos t)$$

$$1 + \cos t = 4(1 - \cos t)$$

$$1 + \cos t = 4 - 4 \cos t$$

$$5 \cos t = 3$$

$$\cos t = \frac{3}{5}$$

Nu schrik je misschien dat je t niet exact kunt uitrekenen. Dit hoeft echter niet. De beide rechthoeken zijn volgens de opgave in dit geval vierkanten, en je hoeft dus maar één zijde uit te rekenen. Je kunt zien dat je zijde ON kunt uitrekenen als je $\cos t$ kent.

$$ON = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Rechthoek 1 heeft dan dus zijde $\frac{4}{5}$. Op dezelfde manier kun je RA uitrekenen.

$$RA = 1 - \cos t = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

De zijde van rechthoek 2 is dus $\frac{2}{5}$.