© havovwo.nl

# Over een parabool gespannen

1. Lijn $RS$ is de raaklijn aan $f(x)$ in het punt $R$. Het eerste wat je dus moet doen, is de formule van de raaklijn opstellen. Eerst bereken je de afgeleide van $f(x)$:

$$f(x) = 3 - x^2$$
$$f'(x) = -2x$$

Nu gebruik je de afgeleide om de richtingscoëfficiënt in punt $R$ te berekenen. $R$ ligt op $x = 1$, dus je krijgt:

$$f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

De raaklijn heeft dus de formule (met onbekende $b$):

$$y = -2x + b$$

Nu moet je erachter zien te komen wat $b$ is. De raaklijn gaat door punt $R$. Daar geldt $x = 1$ en $y = 2$. Dit vul je in in de vorige formule:

$$2 = -2 \cdot 1 + b$$
$$b = 4$$

De raaklijn heeft dus de formule:

$$y = -2x + 4$$

En het laatste wat je moet doen is aantonen dat deze lijn de x-as snijdt bij $x = 2$. Je vult $x = 2$ in:

$$y(2) = -2 \cdot 2 + 4$$
$$y(2) = 0$$

En inderdaad, bij $x = 2$ geldt $y = 0$, dus hij snijdt de x-as in $x = 2$.

2. Eerst deel je het touwtje op in drie stukken: $PQ$, $QR$ en $RS$. Van twee van deze stukken kan je de lengte makkelijk berekenen, namelijk van $PQ$ en $RS$. Je gebruikt de stelling van pythagoras:

$$PQ = RS = \sqrt{1^2 + 2^2}$$
$$PQ = RS = \sqrt{5}$$

De lengte van $QR$ is wat ingewikkelder. Op de formulekaart kan je deze formule vinden:

$$QR = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

© havovwo.nl

Je kent de grenzen $a$ en $b$, en je kent $f'(x)$, dus die kun je gewoon invullen:

$$QR = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(-2x)^2}\mathrm{d}x$$

Deze integraal kan je niet algebraïsch oplossen. Je moet dit dus met de GR doen. Ik laat hier zien hoe het op de Ti-84 plus moet. Op de casio kan de notatie afwijken, maar de methode is hetzelfde. Je plot een grafiek:

$$y_1 = \sqrt{1+4x^2}$$

Dan gebruik je de functie $\int f(x)\mathrm{d}x$ om de integraal te benaderen. Je vindt:

$$QR = 2.958$$

Hierbij tel je de lengte van $PQ$ en $RS$ bij op om de lengte $l$ van het touwtje te krijgen. Deze lengtes waren beide $\sqrt{5}$.

$$l = 2.958 + 2 \cdot \sqrt{5} = 7.43$$

3. Eerst reken je het snijpunt van de parabool met de x-as uit:

$$3 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \bigvee x = -\sqrt{3}$$

De gevraagde oppervlakte is de oppervlakte onder lijn $RS$ min de oppervlakte onder $f(x)$ van $x = 1$ tot $x = \sqrt{3}$. De oppervlakte onder lijn $RS$ is makkelijk te berekenen. Het is gewoon een driehoek, dus er geldt $A = \frac{1}{2}$basis·hoogte.

$$A_{onder\ driehoek} = \frac{1}{2}1 \cdot 2 = 1$$

De oppervlakte onder $f(x)$ moet met een integraal berekend worden.

$$A_{onderf(x)} = \int_{1}^{\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x$$
$$A_{onderf(x)} = \int_{1}^{\sqrt{3}} 3 - x^2\mathrm{d}x$$
$$A_{onderf(x)} = \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$A_{onderf(x)} = 3\sqrt{3} - \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3$$
$$A_{onderf(x)} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\frac{2}{3}$$
$$A_{onderf(x)} = 2\sqrt{3} - 2\frac{2}{3}$$

De gevraagde oppervlakte is nu de oppervlakte onder de driehoek min de oppervlakte onder $f(x)$, oftewel:

$$A_{gevraagd} = 1 - 2\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}$$
$$A_{gevraagd} = 3\frac{2}{3} - 2\sqrt{3}$$