6 Bebuikte rechthoeken

16. De oppervlakte van een cirkelsector is gelijk aan de oppervlakte van de cirkel maal $\frac{t}{2\pi}$, dus de oppervlakte van een cirkelsector is $\frac{t}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 16 = 8t$. De oppervlakte van een van de driehoeken is een half maal basis maal hoogte. De basis is $\sin(t) \cdot 4$ en de hoogte is $\cos(t) \cdot 4$. Ik had dit ook andersom kunnen kiezen, dat maakt voor de uitkomst niet uit. Het enige dat uitmaakt is dat een van de twee $\sin(t) \cdot 4$ is en de andere $\cos(t) \cdot 4$. De oppervlakte van een driehoek wordt dan $\frac{1}{2} \cdot 4\sin(t) \cdot 4\cos(t) = 8\sin(t)\cos(t)$. De hele figuur bevat 2 cirkelsectoren en 6 driehoeken, dus deze oppervlakte O is:

$$O(t) = 2 \cdot 8t + 6 \cdot 8\sin(t)\cos(t)$$
$$O(t) = 16t + 24 \cdot 2\sin(t)\cos(t)$$

Nu kun je een verdubbelingsformule toepassen.

$$O(t) = 16t + 24 \cdot \sin(2t)$$

17. De hoogte is gelijk aan $2 \cdot \sin(t) \cdot 4 = 8 \cdot \sin(t)$. Dit is eenvoudig uit figuur 2 te halen. De hoogte is ook gelijk aan 4, dus:

$$8 \cdot \sin(t) = 4$$
$$\sin(t) = \frac{1}{2}$$

Omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ is er maar één oplossing voor deze vergelijking.

$$t = \frac{1}{6}\pi$$

Dit kun je invullen in de formule voor O.

$$O\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 16 \cdot \frac{1}{6}\pi + 24 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{1}{6}\pi\right)$$
$$O\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\frac{2}{3}\pi + 24 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$$
$$O\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\frac{2}{3}\pi + 24 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$O\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\frac{2}{3}\pi + 12\sqrt{3}$$

18. Je gaat eerst kijken wanneer O maximaal is. Dit doe je door te differentiëren. Denk wel aan de kettingregel.

$$O(t) = 16t + 24 \cdot \sin(u) \text{ met } u = 2t$$
$$O'(t) = 16 + 24 \cdot \cos(u) \cdot u' \text{ en } u' = 2$$
$$O'(t) = 16 + 24 \cdot \cos(2t) \cdot 2$$
$$O'(t) = 16 + 48 \cdot \cos(2t)$$

O is maximaal als de afgeleide gelijk is aan 0, dus je rekent uit voor welke t dit geldt:

$$\begin{aligned} 0 &= 16 + 48 \cdot \cos(2t) \\ 48 \cdot \cos(2t) &= -16 \\ \cos(2t) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

In de vorige vraag had je gezien dat de hoogte, en die wil je uiteindelijk weten, gelijk is aan $8 \cdot \sin(t)$. Nu is er een probleem. Deze formule werkt met de sinus van t, en je weet de waarde van de cosinus van $2t$. Nu kun je wel een nieuwe formule voor de hoogte opstellen die de cosinus gebruikt, maar je kunt ook proberen om de cosinus om te schrijven naar een sinus. Daarvoor kijk je naar de verdubbelingsformules. Met een verdubbelingsformule ben je namelijk ook gelijk die 2 kwijt. De volgende formule lijkt wel handig:

$$\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$$

Als je dit gebruikt in de eerdere uitkomst krijg je:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot \sin^2(t) &= -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} &= 2 \cdot \sin^2(t) \\ \frac{2}{3} &= \sin^2(t) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} &= \sin(t) \end{aligned}$$

Als je denkt dat ik een oplossing vergeten ben, namelijk $\sin(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, dan heb je helemaal gelijk, maar als je doorrekent met die oplossing krijg je een negatieve hoogte, en dat is niet bepaald een goede oplossing. Je kunt deze waarde voor $\sin(t)$ nu invullen in de formule voor de hoogte. Deze hoogte h is gelijk aan $8 \cdot \sin(t)$. Je krijgt dan:

$$h = 8 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bij deze hoogte is de oppervlakte dus maximaal.