

5 Een leugendetector

13. De verwachtingswaarde voor het aantal leugenaars die daadwerkelijk als leugenaars worden aangewezen is $0.88 \cdot 1 = 0.88$, aangezien de kans dat een leugenaar aangewezen wordt als leugenaar 0.88 is, en er 1 leugenaar wordt getest. De verwachtingswaarde voor het aantal mensen die de waarheid spreken en toch als leugenaar worden aangewezen is $0.25 \cdot 4 = 1.00$, aangezien de kans dat iemand die de waarheid spreekt toch als leugenaar wordt aangewezen 0.25 is, en er 4 mensen worden getest die de waarheid spreken. Volgens de rekenregels voor verwachtingswaarden mag je deze waarden optellen om de totale verwachtingswaarde voor het aantal aangewezen leugenaars te krijgen. Deze verwachtingswaarde is dus $0.88 + 1.00 = 1.88$.
14. De kans dat de leugenaar wordt aangewezen als leugenaar en de vier waarheidssprekers niet is gelijk aan de kans dat de leugenaar wordt aangewezen als leugenaar maal de kans dat de vier waarheidssprekers allemaal niet als leugenaar worden aangewezen. Deze kans is dus $0.88 \cdot 0.75^4 \approx 0.2784$. De kans dat de leugenaar niet wordt aangewezen en een van de anderen wel is gelijk aan de kans dat de leugenaar niet wordt aangewezen maal de kans dat een waarheidsspreker als leugenaar wordt aangewezen maal de kans dat de andere drie waarheidssprekers niet worden aangewezen, en dan nog maal 4. Maal 4 omdat deze gebeurtenis op 4 manieren kan gebeuren. Waarheidsspreker 1 kan als leugenaar worden aangewezen en de anderen niet, waarheidsspreker 2 kan worden aangewezen en de anderen niet, enzovoort. Deze kans is dus $0.12 \cdot 0.25 \cdot 0.75^3 \cdot 4 \approx 0.0506$. De totale kans dat precies een leugenaar wordt aangewezen is dan de som van deze twee kansen, oftewel $0.2784 + 0.0506 \approx 0.33$.
15. Het aantal waarheidssprekers die als leugenaar worden aangewezen noem ik X . Deze toevalsvariabele is binomiaal verdeeld. Het aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd is 10, de kans dat een waarheidsspreker als leugenaar wordt aangewezen is onbekend, deze kans noem ik x , en je wilt weten voor welke x de kans dat er minstens één persoon als leugenaar wordt aangewezen hoogstens 0.50 is.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\leq 0.50 \\ 1 - P(X = 0) &\leq 0.50 \\ P(X = 0) &\geq 0.50 \end{aligned}$$

Wat je nu moet doen hangt af van je rekenmachine, ik laat zien hoe het op de Ti-84 plus moet.

$$\text{binompdf}(10, x, 0) \geq 0.50$$

Deze vergelijking kun je het makkelijkst oplossen door twee grafieken te plotten en het snijpunt te berekenen.

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{binompdf}(10, x, 0) \\ y_2 &= 0.50 \end{aligned}$$

Nu bereken je het snijpunt. Op de Ti-84 plus gaat dat met calc intersect. Dit geeft als antwoord $x \approx 0.06697$. Maar nu moet je nog bedenken aan welke kant van deze x -waarde de kans kleiner groter is dan 0.50. Als je naar de grafiek kijkt blijkt dit de linkerkant te zijn. Let op: Bij het afronden van deze kans moet je hierom dus naar beneden afronden. De kans dat een waarheidsspreker als leugenaar wordt aangewezen mag dus maximaal 0.066 zijn.