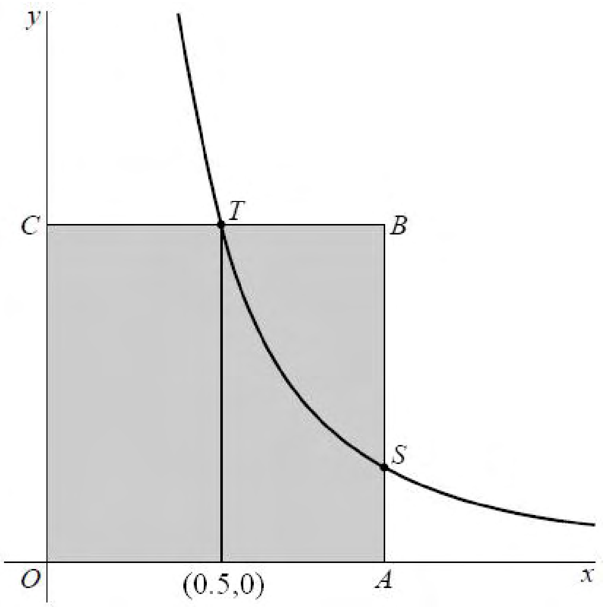
3 Een verdeeld vierkant

6. Als $p = 4$ is heeft S de coördinaten $(4, \frac{1}{4^2})$ en heeft T de coördinaten $(\frac{1}{\sqrt{4}}, 4)$. De richtingscoëfficiënt is:

$$\text{rc} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\text{rc} = \frac{\frac{1}{4^2} - 4}{4 - \frac{1}{\sqrt{4}}}$$
$$\text{rc} = \frac{-3\frac{15}{16}}{3\frac{1}{2}}$$
$$\text{rc} = -1\frac{1}{8}$$

7. He gevraagde vlak kun je in twee stukken delen.



Je trekt een lijn naar beneden door T. Deze lijn verdeelt het vlak in twee vlakken. De x-coördinaat van deze lijn is gelijk aan de x-coördinaat van punt T, en dit is $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. Nu reken je uit wat de oppervlakte van de rechthoek links van de net getekende lijn is. Dit is gewoon lengte maal breedte, oftewel $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Nu moet je nog de oppervlakte onder de grafiek tussen $\frac{1}{2}$ en 4 uitrekenen. Dit doe je door te integreren. De oppervlakte onder de grafiek tussen $\frac{1}{2}$ en 4 noem ik O.

$$O = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$O = \int_{\frac{1}{2}}^{4} x^{-2}\mathrm{d}x$$

$$O = \left[-x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{4}$$

$$O = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{4}$$

$$O = -\frac{1}{4} + 2$$

$$O = 1\frac{3}{4}$$

De oppervlakte van het rechtervlakdeel is dus $1\frac{3}{4}$. De totale oppervlakte is dan $2+1\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$.

8. Als T het midden van BC is, heeft T de x-coördinaat $\frac{1}{2}p$, omdat BC lengte p heeft. Maar T heeft ook x-coördinaat $\frac{1}{\sqrt{p}}$, want dit staat in de opgave. Je moet dus vinden wanneer $\frac{1}{2}p$ gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{p}}$.

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{2}p\sqrt{p} = 1$$

$$p^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$p = \sqrt[\frac{3}{2}]{2}$$

$$p = 2^{\frac{2}{3}}$$

9. De diagonaal heeft richtingscoëfficiënt -1, omdat $OABC$ een vierkant is. Je moet eerst maar eens de x-coördinaat van het raakpunt uitrekenen. Je rekent dus uit bij welke x de grafiek van $f(x)$ een rc heeft van -1. Daarvoor moet je eerst $f(x)$ differentiëren.

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Nu moet je uitrekenen voor welke x deze afgeleide gelijk is aan -1.

$$-1 = -\frac{2}{x^3}$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

De raaklijn heeft de formule $y = -x + p$, want hij heeft een rc van -1 en op $x = 0$ geldt $y = p$. Nu wil je vinden voor welke p deze raaklijn de grafiek raakt in het punt met de x-coördinaat $\sqrt[3]{2}$. Daarvoor moet je eerst vinden welke y-coördinaat daarbij hoort.

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}$$
$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Nu weet je dat de raaklijn door het punt $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ gaat. Je kunt deze getallen invullen als x en y in de formule $y = -x + p$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\sqrt[3]{2} + p$$
$$p = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$$
$$p \approx 1.89$$

Als $p = 1.89$ raakt de diagonaal AC dus precies aan $f(x)$.