

Bewegende schaduw

Bij een practicumproef draait een doorzichtige cirkelvormige schijf in een verticaal vlak om zijn middelpunt M . Deze schijf heeft een straal van 1 meter. Tussen twee punten op de rand van de schijf wordt een staaf AB met lengte 1 meter bevestigd. De punten op de rand van de schijf hebben een constante snelheid van 1 m/s. Het geheel wordt beschenen door een bundel verticaal invallende evenwijdige lichtstralen. In deze opgave bekijken we de lengte van de schaduw $A'B'$ van de staaf op de grond.

We maken een wiskundig model bij deze proef. We kiezen het assenstelsel in het draaivlak van de schijf, met de x -as langs de grond en de y -as door het middelpunt M van de schijf. De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A = \cos(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y_A = 1\frac{1}{5} + \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B = \cos(t + \frac{1}{6}\pi) \\ y_B = 1\frac{1}{5} + \sin(t + \frac{1}{6}\pi) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meter en is t in seconde.

In figuur 1 staat een vooraanzicht van de situatie op een zeker tijdstip.

De lengte (in meter) van de schaduw $A'B'$ op tijdstip t noemen we $l(t)$. Voor elke waarde van t tussen 0 en π geldt: $l(t) = \sin t$.

- 5p **11** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Om de gemiddelde schaduwlengte g van AB (in meter) te berekenen, kunnen we ons beperken tot een halve omwenteling: $0 \leq t \leq \pi$.

g kan berekend worden met een integraal: $g = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} l(t) dt$.

Er geldt: $g = \frac{2}{\pi}$.

- 4p **12** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

We vergelijken de delen van de omwentelingstijd waarvoor $l(t) > \frac{2}{\pi}$ en waarvoor $l(t) < \frac{2}{\pi}$. We kunnen ons weer beperken tot een halve omwenteling: $0 \leq t \leq \pi$.

- 5p **13** Onderzoek of deze delen even groot zijn.

figuur 1

