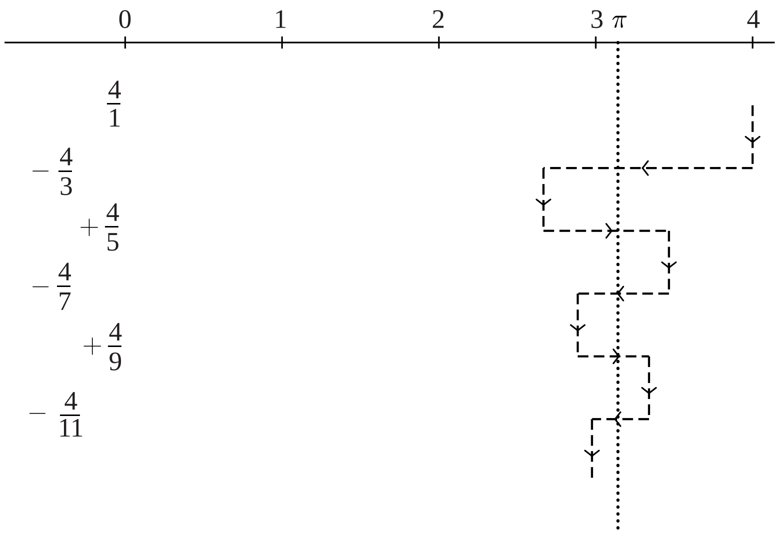
Pi in het oude India

In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.
Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π. Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.
Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π. Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π.

3p **18** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1},-\frac{4}{3},\frac{4}{5},-\frac{4}{7},\frac{4}{9},-\frac{4}{11},\ldots$
De directe formule voor deze rij is van de vorm:

$$u_n=\frac{a\cdot(-1)^{n-1}}{b\cdot(n-1)+1} \text{ met } n=1, 2, 3,\ldots$$

3p **19** Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.
Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

5p **20** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, \ldots$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.