

Talen

De wereldbevolking bedroeg in 2010 ongeveer 6800 miljoen (6,8 miljard) mensen. Volgens schattingen uit dat jaar werden er toen op de wereld ruim 500 talen gesproken.

In deze opgave verstaan we onder sprekers van een taal alleen de mensen voor wie deze taal hun moedertaal is.

Sommige talen worden door meer dan 100 miljoen mensen gesproken, maar er zijn ook talen die nog slechts door enkele tientallen mensen gesproken worden.

Hoe meer mensen een taal spreken, hoe groter we die taal noemen.

Alle aantallen in deze opgave hebben betrekking op het jaar 2010 en zijn benaderingen op grond van schattingen.

De grootste taal is het Mandarijn met 800 miljoen sprekers.

De kans dat van 6 willekeurig gekozen mensen uit de totale wereldbevolking er minstens één Mandarijn spreekt, is groter dan 0,5.

4p 10 Bereken deze kans in drie decimalen nauwkeurig.

Van alle gesproken talen is er een ranglijst waar de talen op volgorde van veel naar weinig sprekers staan. De top-15 van de meest gesproken talen in 2010 staat in onderstaande tabel.

tabel

1	Mandarijn	800 000 000
2	Spaans	358 000 000
3	Engels	350 000 000
4	Hindi/Urdu	240 000 000
5	Bengaals	170 000 000
6	Russisch	160 000 000
7	Portugees	150 000 000
8	Arabisch	150 000 000
9	Japans	126 000 000
10	Duits	100 000 000
11	Wu	90 000 000
12	Javaans	70 000 000
13	Punjab	70 000 000
14	Frans	70 000 000
15	Telugu	70 000 000

Deze 15 talen hebben samen 2974 miljoen sprekers. Van de ruim 500 talen zijn er 86 talen met 10 miljoen of meer sprekers. Op de 44e plaats staat het Nederlands met 20 miljoen sprekers. Hieruit kun je concluderen dat de talen op de plaatsen 45 tot en met 86 elk minstens 10 miljoen en hoogstens 20 miljoen sprekers hebben.

Met deze gegevens kun je niet het exacte totaal aantal sprekers van de 86 talen met meer dan 10 miljoen sprekers berekenen. Wel is het mogelijk om een onder- en een bovengrens van dit aantal te berekenen.

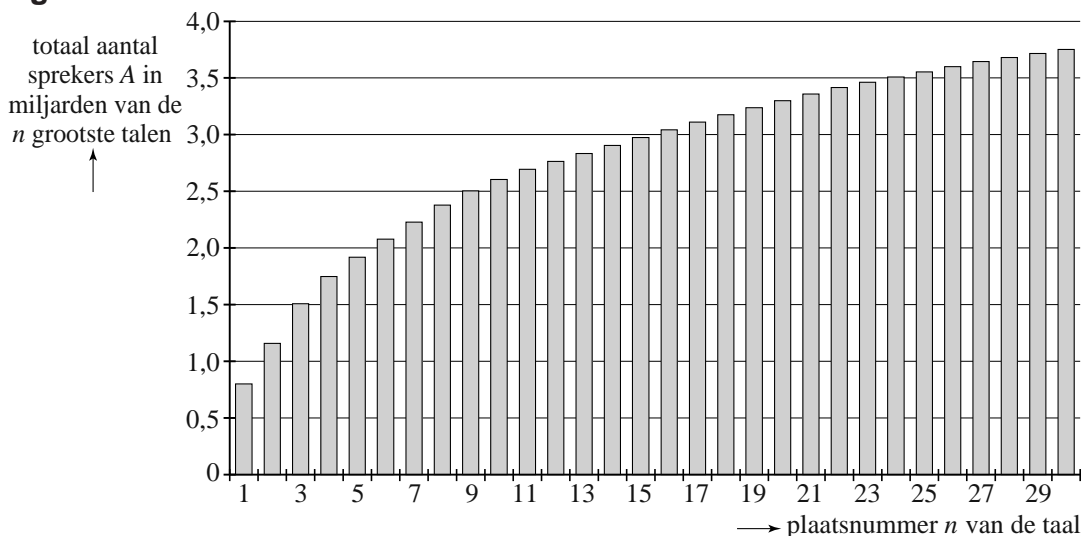
- 4p 11 Laat zien dat het mogelijk is dat het totaal aantal sprekers van de eerste 86 talen groter is dan 5,7 miljard.

Onderzoekers willen een formule opstellen waarmee het totaal aantal sprekers van de n grootste talen berekend kan worden als n gegeven is. Neem aan dat geen enkel tweetal talen precies hetzelfde aantal sprekers heeft.

- 3p 12 Beredeneer dat de grafiek van het totaal aantal sprekers afnemend stijgend is.

We ordenen de talen van groot naar klein en maken een staafdiagram met cumulatieve totalen. In onderstaande figuur is het staafdiagram weergegeven met op de horizontale as het plaatsnummer n van de 30 meest gesproken talen en op de verticale as het totaal aantal sprekers A in miljarden van de n grootste talen.

figuur



De 15e staaf in deze figuur geeft aan dat het totaal aantal sprekers van de 15 grootste talen 2974 miljoen (2,974 miljard) is.

De bovenkanten van de staven kunnen worden benaderd met een kromme die het verband tussen het totaal aantal sprekers A van de n grootste talen en n weergeeft. Een benadering van de kromme door de bovenkanten van de staven wordt gegeven door de formule:

$$A = 0,92 \cdot n^{0,43}$$

Hierbij is n het plaatsnummer van een taal en A het totaal aantal sprekers in miljarden van de n grootste talen.

- 4p 13 Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat de grafiek van A inderdaad afnemend stijgend is.

De formule $A = 0,92 \cdot n^{0,43}$ kan ook gebruikt worden om te berekenen hoeveel talen er ten minste nodig zijn om een bepaald aantal mensen in hun eigen taal te kunnen bereiken. De formule kan hiervoor herleid worden tot de vorm:

$$n = b \cdot A^c$$

- 4p 14 Bereken b en c . Rond je antwoorden af op twee decimalen.

De formule $A = 0,92 \cdot n^{0,43}$ geeft voor kleine waarden van n een redelijke benadering van A . Een nadeel van deze formule is dat voor grote waarden van n het totaal aantal sprekers A groter wordt dan de totale wereldbevolking. Onderzoekers willen daarom een formule gebruiken waarin de waarde van A niet groter wordt dan 6,8. Daarom stelden zij voor een formule te gebruiken van de vorm:

$$A = 6,8(1 - g^n)$$

Ook in deze formule is n het plaatsnummer van een taal en A het totaal aantal sprekers in miljarden van de n grootste talen.

Er is een waarde van g , waarbij deze nieuwe formule voor de 15 grootste talen het aantal van 2,974 miljard sprekers oplevert.

- 4p 15 Bereken deze waarde van g in twee decimalen nauwkeurig.