1 Zeemonsters

1. Je kunt met de formule van Paxton uitrekenen hoeveel soorten er eind 1995 bekend waren. Dit doe je door $t = 1995$ in te vullen in de formule:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{264t - 476657}{t - 1767} \\ P(1995) &= \frac{264 \cdot 1995 - 476657}{1995 - 1767} \\ P(1995) &= \frac{50023}{228} \\ P(1995) &\approx 219 \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kun je uitrekenen hoeveel soorten er eind 1895 bekend waren.

$$\begin{aligned} P(1895) &= \frac{264 \cdot 1895 - 476657}{1895 - 1767} \\ P(1895) &= \frac{23623}{128} \\ P(1895) &\approx 185 \end{aligned}$$

Er zijn tussen 1895 en 1995 dus volgens de formule $219 - 185 = 34$ soorten ontdekt.

2. Je begint met het differentiëren van $P(t)$. Denk hierbij aan de quotiëntregel.

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{264t - 476657}{t - 1767} \\ P'(t) &= \frac{(t - 1767) \cdot 264 - (264t - 476657) \cdot 1}{(t - 1767)^2} \\ P'(t) &= \frac{264t - 466488 - 264t + 476657}{(t - 1767)^2} \\ P'(t) &= \frac{10169}{(t - 1767)^2} \end{aligned}$$

De teller is positief, en de noemer is ook positief, want een kwadraat kan nooit negatief worden. Hieruit kun je concluderen dat de afgeleide van $P(t)$ altijd positief is, en dus is $P(t)$ altijd stijgend.

3. Deze opgave los je op met de GR. Ik beschrijf hier hoe dat op de Ti-84 plus gaat. Je voert de twee formules in:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{264t - 476657}{x - 1767} \\ y_2 &= 218 \cdot \left(1 - 0.9799^{x-1798}\right) \end{aligned}$$

Vervolgens stel je de rekenmachine af zodat hij afrondt op gehelen. Je doet dit in het menu mode en je selecteert dan in de tweede rij de nul. Vervolgens laat je de rekenmachine een tabel maken. Dan kijk je in de tabel in welke jaren beide formules hetzelfde antwoord geven. Dan krijg je de jaren 1941, 1942, 1944 en 1945.

4. Eerst ga je kijken hoeveel soorten er in 2009 bekend zijn volgens Groot. Je vult in dat $t = 2009$.

$$\begin{aligned} G(t) &= 218 \cdot \left(1 - 0.9799^{t-1798}\right) \\ G(2009) &= 218 \cdot \left(1 - 0.9799^{2009-1798}\right) \\ G(2009) &= 218 \cdot \left(1 - 0.9799^{211}\right) \\ G(2009) &\approx 218 \cdot (1 - 0.014) \\ G(2009) &\approx 218 \cdot 0.986 \\ G(2009) &\approx 215 \end{aligned}$$

Nu ga je kijken wat de grenswaarde van $G(t)$ is. Je kijkt wat er uit de formule komt als t heel groot is. Als t heel groot is, is $t - 1798$ ook heel groot, en daaruit volgt weer dat 0.9799^{t-1798} praktisch gelijk aan 0 is. Dan is $1 - 0.9799^{t-1798}$ praktisch gelijk aan 1, en is $218 \cdot \left(1 - 0.9799^{t-1798}\right)$ praktisch gelijk aan 218. De grenswaarde is dus 218. Vanaf 2009 zullen er dus volgens Groot nog $218 - 215 = 3$ zeemonsters worden ontdekt.

5. Wat de waarden voor a en b ook zijn, de volgende twee dingen moeten gelden: bij $t = 1895$ moet $F(1895)$ gelijk zijn aan 187, en bij $t = 1995$ moet $F(1995)$ gelijk zijn aan 217. Je krijgt dus een stelsel vergelijkingen:

$$\begin{gathered} F(1895) = 187 \text{ en } F(1995) = 217 \\ \sqrt{a \cdot 1895 + b} = 187 \text{ en } \sqrt{a \cdot 1995 + b} = 217 \\ a \cdot 1895 + b = 34969 \text{ en } a \cdot 1995 + b = 47089 \\ b = 34969 - 1895a \text{ en } b = 47089 - 1995a \end{gathered}$$

Hier heb je twee uitdrukkingen voor b, dus die mag je aan elkaar gelijkstellen.

$$\begin{aligned} 34969 - 1895a &= 47089 - 1995a \\ 100a &= 12120 \\ a &= 121.2 \end{aligned}$$

Nu je a weet, kun je ook b uitrekenen, bijvoorbeeld met $1895a + b = 34969$:

$$\begin{aligned} 1895 \cdot 121.2 + b &= 34969 \\ 229674 + b &= 34969 \\ b &= -194705 \end{aligned}$$

Nu heb je de waarden voor a en b, namelijk $a = 121.2$ en $b = -194705$.