

## Overleven

Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen gebruiken zogenoemde overlevingstafels. Aan de hand van die overlevingstafels kunnen zij bepalen hoe lang verzekerden en pensioengerechtigden naar verwachting in leven zullen blijven. Een overlevingstafel is een tabel waarin van een groep van 100 000 pasgeborenen staat welk aantal er na  $x$  jaar naar verwachting nog in leven is. Dit aantal heet  $L(x)$ . Tabel 2 hieronder geeft een voorbeeld van een overlevingstafel voor vrouwen in Nederland. In de tabel staat in de laatste kolom het totaal resterend aantal persoonsjaren  $T(x)$ .

tabel 2

exacte leeftijd $x$	aantal overlevenden $L(x)$	totaal resterend aantal persoonsjaren $T(x)$
0	100 000	8 045 490
1	99 548	7 945 899
10	99 372	7 050 943
20	99 184	6 058 135
30	98 862	5 067 651
40	98 209	4 081 590
50	96 657	3 111 983
60	92 618	2 159 036

In tabel 2 kun je in de tweede kolom bijvoorbeeld aflezen dat per 100 000 pasgeboren meisjes er naar verwachting nog 98 209 op hun 40e verjaardag in leven zijn. In de derde kolom kun je aflezen dat deze 98 209 vrouwen samen nog 4 081 590 jaar voor de boeg hebben.

Op basis van de gegevens in tabel 2 kun je de kans berekenen dat een vrouw van een bepaalde leeftijd al dan niet een hogere leeftijd bereikt.

- 4p **7** Bereken de kans dat een vrouw die zojuist 30 jaar geworden is, vóór haar 60e verjaardag overlijdt.

De waarde van  $T(0)$  in tabel 2 geeft aan dat pasgeboren meisjes gemiddeld bijna 80,5 jaar oud worden.

- 4p **8** Laat met een berekening zien dat vrouwen die hun 50e verjaardag bereiken, volgens de tabel gemiddeld ruim 82 jaar oud worden.

Al in 1825 ontdekte Gompertz dat de waarden van  $L(x)$  in een overlevingstafel goed te benaderen zijn met een formule van de vorm:

$$L(x) = 100000 \cdot g^{(c^x - 1)}$$

Hierin worden dan voor  $g$  en  $c$  geschikte getallen gekozen.

Een verzekeringsmaatschappij gebruikt voor een groep van 100 000 pasgeboren meisjes de formule van Gompertz met  $g = 0,999$  en  $c = 1,085$ . Het aantal vrouwen dat na  $x$  jaar nog in leven is, kan dan worden berekend met de formule:

$$L(x) = 100000 \cdot 0,999^{(1,085^x - 1)}$$

In de rest van deze opgave gaan we steeds van deze laatste formule uit.

Met deze formule kunnen we uitrekenen welke leeftijd door maar 50% van de vrouwen wordt gehaald volgens deze verzekeringsmaatschappij.

4p **9** Bereken deze leeftijd.

Gompertz bestudeerde aanvankelijk de zogenoemde **sterfte-intensiteit** in plaats van de functie  $L(x)$ . Deze sterfte-intensiteit  $S(x)$  is als volgt gedefinieerd:

$$S(x) = -\frac{L'(x)}{L(x)}$$

Drie wiskunde-A1,2-leerlingen proberen bij een praktische opdracht over overlevingstafels onder woorden te brengen wat de sterfte-intensiteit voorstelt. Dit doen zij zonder de afgeleide van  $L(x)$  te bepalen. Ieder van hen komt met een voorstel:

Johan: "De sterfte-intensiteit  $S(x)$  is, bij benadering, het aantal overlevenden per sterfgeval na  $x$  jaar."

Fiona: "De sterfte-intensiteit  $S(x)$  is, bij benadering, het aantal sterfgevallen per overlevende na  $x$  jaar."

Samira: "De sterfte-intensiteit  $S(x)$  is, bij benadering, de afname per jaar van het aantal overlevenden na  $x$  jaar."

Ze kunnen het niet eens worden. Hun wiskundeleraar geeft aan dat één van de drie voorstellen correct is.

4p **10** Welk van de drie voorstellen is correct? Licht je antwoord toe.

De verzekeringsmaatschappij gebruikt een exponentiële functie voor de sterfte-intensiteit  $S(x)$ . Om te laten zien dat  $S(x)$  inderdaad exponentieel is, moet eerst de afgeleide van  $L(x)$  worden bepaald.

4p **11** Toon aan dat voor deze afgeleide geldt:  $L'(x) \approx -8,16 \cdot 0,999^{(1,085^x - 1)} \cdot 1,085^x$

Met behulp van de formules van  $L(x)$  en  $L'(x)$  kunnen we nu een formule opstellen voor  $S(x)$ . Deze formule is te schrijven in de vorm  $S(x) = b \cdot g^x$ .

3p **12** Bereken  $b$  en  $g$ .