

Honingbijen

Biologen verrichten veel onderzoek bij diverse diersoorten. Vaak maken zij gebruik van wiskundige modellen om het gedrag van de betreffende diersoort te beschrijven. Daarover gaat deze opgave.

Dansende bijen

De honingbij (*Apis Mellifera*) verzamelt nectar van bloemen om honing van te maken. Soms halen de honingbijen de nectar van grote afstand.



Apis Mellifera, de honingbij

Honingbijen geven elkaar informatie over de afstand tot de voedselbron door zogenoemde kwispeldansen uit te voeren. Het aantal kwispeldansen dat een honingbij per minuut maakt is een maat voor de afstand. Voor afstanden tussen de 300 en 2700 meter geldt ruwweg de volgende formule: $y = \frac{36}{x+1}$. Hierin is x de afstand tot de voedselbron in kilometers en y het aantal kwispeldansen per minuut.

Een honingbij die een nieuwe voedselbron heeft ontdekt, maakt 16 kwispeldansen per minuut.

3p **12** Bereken de afstand tot deze voedselbron in meters nauwkeurig.

Een honingbij heeft een voedselbron ontdekt en maakt kwispeldansen om andere honingbijen te informeren over de afstand. Een andere honingbij heeft een andere voedselbron ontdekt die 1 kilometer dichterbij is. Deze honingbij maakt per minuut 40% meer kwispeldansen dan de eerste honingbij. Met behulp van de formule kun je berekenen om welke twee afstanden het hier gaat.

5p **13** Bereken deze twee afstanden.

Tastende bijen

Honingbijen blijken gedrag te kunnen aanleren. De bioloog J. Erber heeft daar onderzoek naar gedaan. In zijn experiment krijgt een aantal honingbijen een voorwerp voor zich geplaatst. Een honingbij die het voorwerp betast, wordt beloond met een suikeroplossing. De honingbij maakt dan een strekbeweging om de suikeroplossing op te zuigen. Direct daarna wordt het voorwerp weggehaald.

Na 5 minuten wordt het voorwerp weer teruggeplaatst: **de 1e conditionering**. Sommige honingbijen maken dan een strekbeweging. Deze worden direct beloond. De honingbijen die geen strekbeweging maken, worden pas beloond nadat ze het voorwerp hebben betast. In beide gevallen wordt het voorwerp weggehaald zodra de honingbij beloond is.

Na weer 5 minuten wordt het voorwerp opnieuw teruggeplaatst – **de 2e conditionering** – en wordt het hierboven beschreven proces herhaald. Iedere keer telt men hoeveel procent van de honingbijen direct uit zichzelf strekbewegingen maakt. Zo vertoont bijvoorbeeld bij de 2e conditionering ongeveer 10% van de honingbijen een strekbeweging. Bij de 3e conditionering is dat ongeveer 20%.

Het percentage honingbijen dat een strekbeweging maakt, blijkt te verlopen volgens de recurrente betrekking:

$$P(n) = 4,0 + 1,6 \cdot P(n-1) - 0,012 \cdot (P(n-1))^2 \quad \text{met } P(0) = 0$$

Hierin is $P(n)$ het percentage bijen dat tijdens de n -de conditionering een strekbeweging maakt.

- 4p **14** Bereken met de recurrente betrekking hoeveel procent van de honingbijen tijdens de 5e conditionering een strekbeweging maakt.

Uit experimenten blijkt dat lang niet alle bijen de strekbeweging zullen gaan maken. Daarom zal de bovenstaande recurrente betrekking een grenswaarde moeten hebben die kleiner is dan 100.

- 4p **15** Onderzoek of dit zo is door de grenswaarde van de recurrente betrekking te berekenen.

Nadat de bijen aan 15 conditioneringen zijn onderworpen, wordt het experiment vervolgd met conditioneringen zonder beloning. De aangeleerde neiging om een strekbeweging te maken, neemt dan af. Deze afname tijdens de conditioneringen zonder beloning (dus voor $n = 16, 17, 18$, enzovoort) blijkt exponentieel te verlopen en wel zodanig dat per 7 conditioneringen het aantal bijen dat nog reageert met een strekbeweging halveert. Dit betekent dat het verloop van het percentage honingbijen dat nog een strekbeweging maakt, geschreven kan worden in de vorm van een recurrente betrekking:

$P(n+1) = a \cdot P(n)$ met $n \geq 16$. Hierin is a een constant (dus vast) getal.

- 4p **16** Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.