Profielwerkstuk "Is alles getal ? "

naam: **Bram Schellekens & Nicky van Zon**
 januari 2004

Voorwoord

Dat we het vak filosofie voor ons profielwerkstuk wilden gaan gebruiken hadden we al voor de zomervakantie besloten en toen we eenmaal aan de slag gingen was de keuze voor wiskunde als tweede vak zo gemaakt. Wiskunde en filosofie hebben namelijk veel met elkaar te maken, ze gaan in elkaar over en ze beïnvloeden elkaar, veel meer dan bij bijvoorbeeld scheikunde en filosofie. Wel hadden we door deze grote overlapping een heleboel verschillende onderwerpen waar we uit konden kiezen. Uit verscheidene hoeken kwamen allerlei ideeën bij ons terecht, waar we ons op hebben georiënteerd. Een hoop vallen er dan al af omdat er óf te weinig over te vinden is óf ze te uitgebreid voor een profielwerkstuk zijn. Van al deze ideeën hebben we uiteindelijk de volgende gekozen: Pythagoras (de welbekende wiskundige en filosoof) heeft gesteld dat alles getal is. Wij willen gaan kijken of deze stelling standhoudt in latere filosofieën en wiskundige theorieën.
We willen Jelle Zeedijk, die het maken van dit profielwerkstuk begeleid heeft tot aan de conceptversie en daarbij voor commentaar, bijsturing en hulp bij het zoeken heeft gezorgd, bedanken. Ook Dhr. Verweij bedanken we, die zowel in het begin bij het kiezen van het onderwerp zijn bijdrage heeft geleverd, als bij het omzetten, aanpassen en uitbreiden van de conceptversie naar de definitieve versie.

Inleiding

Als we het onderwerp alleen aan zouden duiden door te zeggen dat het over de uitspraak/stelling van Pythagoras gaat: "Alles is getal" zal dit alleen maar voor heel veel vraagtekens zorgen bij U als lezer. Daarom hier een korte uitleg wat het inhoudt en waar wij met dit profielwerkstuk heen willen.
De stelling "Alles is getal" is eigenlijk een uitspraak van Aristoteles. Hij heeft dit vele jaren na de dood van Pythagoras gesteld óver de ideeën van Pythagoras. Of Pythagoras het zelf ook zo eenduidig heeft gesteld is niet zeker, Pythagoras leefde nl. in een zeer gesloten gemeenschap (uitleg verder in dit profielwerkstuk).
Er zijn weinig tot geen primaire bronnen te vinden. Alle informatie die we hebben is dus achteraf en/of door anderen geschreven en daarom niet helemaal betrouwbaar. Vooral over de jeugd en familie van Pythagoras hebben we veel bronnen gevonden die elkaar echter (gedeeltelijk) tegenspreken. We hebben soms dus moeten kiezen welke informatie het meest betrouwbaar is om de feitelijke werkelijkheid zoveel mogelijk te benaderen. Toch waren er genoeg bronnen over Pythagoras te vinden om dit profielwerkstuk te maken.
Ondanks het feit dat het niet niks is om te stellen dat alles getal is en je niet zomaar tot die conclusie komt, is het niet zo'n bekende stelling als de "Stelling van Pythagoras". Wel is het erg interessant hoe iemand als Pythagoras, met een beperkte kennis van de wereld om zich heen[1], hiertoe komt. Wel zou je kunnen zeggen dat we het met de westerse wetenschap onderschrijven. Wat met deze wetenschap geprobeerd wordt is de wereld te vatten in (wiskundige) formules of modellen. Of je hiermee werkelijk stelt dat alles getal is is natuurlijk de vraag.
Met dit profielwerkstuk willen we bekijken in hoeverre latere filosofen en wiskundigen het nog eens zijn met de stelling "Alles is getal". Dit doen we door zowel uit de oudheid als uit de 20^e eeuw een wiskundige en een filosoof voor het voetlicht te halen. Hierbij kijken we hoe ze denken over de wereld, werkelijkheid, kennis en wiskunde. Ook natuurlijk of ze het wel of niet eens zijn met deze stelling en waarom wel/niet. Dit om te kijken of er verschil zit in de invloed of denkwijze tussen de oudheid en nu.
Voordat we van start kunnen gaan met het bekijken van de invloed moeten we eerst duidelijk hebben wat het precies inhoudt wat Pythagoras gezegd heeft en hoe hij daartoe gekomen is. Hierover zal het eerste hoofdstuk dan ook gaan.

Als duidelijk is wat Pythagoras precies bedoelde met zijn stelling "Alles is getal" en hoe hij tot deze stelling is gekomen kunnen we beginnen met vergelijken. Uit de oudheid gebruiken we hiervoor Plato, als filosoof, en zijn Allegorie van de Grot en de wiskundige Euclides met zijn eigen wiskundige stelsel. Uit de 20^e eeuw zullen wij Gödel, als wiskundige met zijn Onvolledigheidstelling en de filosoof Russell.

[1] In vergelijking tot nu

Alles is getal

Biografie

Pythagoras (580 – 490 v. Chr.) werd geboren als zoon van Mnesarchus en Pythais in Samos (Aegeïsche zee). Mnesarchus, afstammend van de stichter van Samos, was handelsreiziger. Hoewel de bronnen elkaar tegenspreken lijkt het waarschijnlijk dat hij 2 broers had. Deze worden echter nergens meer vermeld in het latere leven van Pythagoras.
Al op jonge leeftijd werd hij onderwezen door vooraanstaande filosofen, waaronder Anaximander en Thales. Zo leerde hij het voordragen van werken van Homerus, retorica, wiskunde, astronomie en het bespelen van de lier. De lessen zouden later het fundament blijken voor Pythagoras' zoektocht naar kennis.
Toen hij ongeveer 20 jaar was ging hij naar Egypte, op aanraden van Thales, om verder te studeren. Hij reisde rond van de ene tempel naar de andere en zou veel hebben gediscussieerd met de daar zittende priesters. In Diospolis werd hij priester, een periode die een stempel op de rest van zijn leven drukte. Veel van de leefregels die hij als priester in Egypte naleefde zijn later terug te zien in de school van Pythagoras. Ook legde hij daar de basis voor zijn kennis van de geometrie.
Verschillende bronnen vermelden dat hij na enkele jaren in Egypte gewoond te hebben gevangen werd genomen en meegenomen naar Babylon waar hij bijna een jaar vast zou hebben gezeten. Andere bronnen vermelden echter dat hij vrijwillig naar Babylon is gegaan. Daarna keerde hij terug naar Samos.
Na zijn terugkeer op Samos richtte hij een eigen (religieuze) school op, de Pythagorische Orde. Zowel mannen als vrouwen konden lid worden van Pythagoras' school. Binnen de school onderscheidden zich de mensen die constant verbleven in en om de school, de mathematikoi, van de mensen die enkel overdag langskwamen om te leren. De mathematikoi hadden strenge leefregels, die Pythagoras voor een groot deel uit Egypte had meegebracht. Zo mochten ze geen eigen bezittingen hebben en waren vegetariër. De leefregels waaraan zij zich moesten houden waren:

1. De natuur is in essentie wiskundig
2. Filosofie is een middel om de geest spiritueel te zuiveren
3. De ziel kan zich verenigen met het Heilige
4. Een aantal vastgestelde tekens hebben mystieke, diepere betekenissen
5. Een strikte zwijgplicht naar de buitenwereld

De laatste regel heeft er voor gezorgd dat er tegenwoordig zeer weinig bronnen zijn over Pythagoras zelf, zijn school of zijn werk. Als er al dingen uit de school naar buiten kwamen was het onduidelijk of de eventuele nieuwe ideeën van Pythagoras zelf afkomstig waren of van een van zijn leerlingen. In de rest van dit hoofdstuk ga ik er echter maar van uit dat alles wat aan Pythagoras is toegeschreven ook daadwerkelijk van hem is.
Zijn school bestond na zijn dood nog ongeveer 20 jaar verder en kreeg steeds meer politieke kleur.

Wiskunde van de Pythagorische Orde

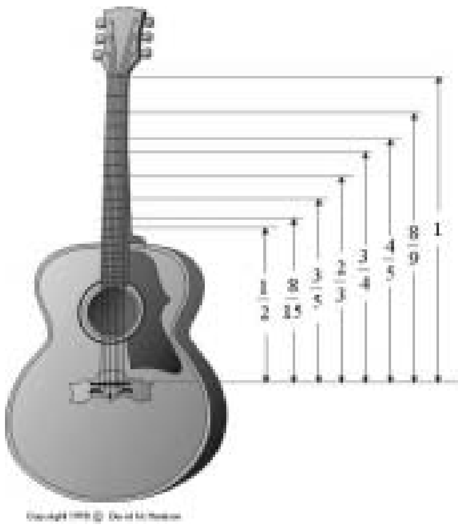
De Pythagorische Orde wijdde zich niet aan het oplossen van wiskundige vraagstukken of het opstellen van formules. In plaats daarvan was zij geïnteresseerd in de "ware aard" van getallen en meetkundige figuren. Zij was een van de eersten die de wiskunde abstraheerde en de sprong die ze daarmee maakte was zeer vernieuwend in die tijd. Tegenwoordig is dat moeilijk te begrijpen aangezien het grootste deel van de moderne wiskunde uitgaat van abstracte wiskunde in tegenstelling tot de vooral praktische wiskunde die toendertijd beoefend werd.
Een zeer belangrijk verschil tussen getallen zoals Pythagoras die zag en zo als wij ze zien, is dat voor Pythagoras getallen correspondeerden met begrippen[2]. Hier zijn soms wel verschillende ideeën over welke betekenis bij welk getal hoort. Het getal dat we altijd in alle bronnen terugvonden was het getal 10. Het getal 10 was het "perfecte

[2] 4 is gerechtigheid: 2 x 2, gelijk maal gelijk
5 is het huwelijk

getal", de "bron van alle dingen". Ook is het de optelsom van 1, 2, 3 en 4, waar de vier belangrijkste muzikale intervallen mee weer te geven zijn.
Een ander verschil tussen de wiskunde van de Pythagorische Orde en die van tegenwoordig is dat Pythagoras geloofde dat de gehele werkelijkheid bestond uit gehele, zuivere getallen. Ofwel was de wereld uit getallen en meetkundige figuren opgebouwd ofwel de getallen en de werkelijkheid waren opgebouwd uit dezelfde materie. Doordat hij weigerde decimale getallen te gebruiken kon hij echter veel wiskundige bewerkingen die wij tegenwoordig gebruiken niet uitvoeren. Dit zou later de ondergang betekenen van de Pythagorische Orde.

Ontdekkingen en ideeën van de Pythagorische Orde
De Pythagorische Orde hield zich naast wiskunde ook bezig met muziek en astronomie. In beide was Pythagoras al op jonge leeftijd goed onderwezen, wat waarschijnlijk heeft geleid tot de ontdekkingen en veronderstellingen die hij heeft gedaan.

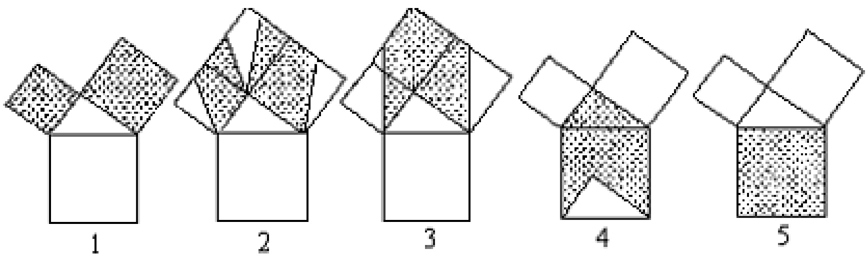
Muzikale intervallen
Het verhaal gaat dat Pythagoras één van zijn grootste ontdekkingen heeft gedaan toen hij zijn lier aan het stemmen was. Hij verkortte de lengte van een snaar om een hoger geluid te krijgen. Al proberende kwam hij erachter dat er een bepaalde wiskundige verhouding bestond tussen de lengte van de snaar en de hoogte van de voortgebrachte toon. Tevens merkte hij op dat de betreffende verhoudingen allemaal te schrijven waren met behulp van breuken van gehele getallen. De belangrijkste hiervan zijn de octaaf (1/2), de kwint (2/3) en de kwart (3/4). Deze verhoudingen zijn allemaal ten opzichte van de totale lengte van de snaar.
Hoewel dit vooral een praktische ontdekking was heeft dit er toch voor grote nieuwe ontdekkingen gezorgd. Het feit dat met gehele getallen de muzikale verhoudingen van intervallen gegeven kon worden verbaasde de Pythagoreeërs niet. Het bevestigde enkel hun overtuiging dat alles op deze wereld wiskundig was.



Harmonie der Sferen
Als bewijs van zijn creativiteit koppelde hij zijn nieuwe muzikale ontdekking aan de waarnemingen die hij deed betreffende de hemellichamen. In die tijd waren er (inclusief zon, maan en aarde) maar acht planeten bekend. Pythagoras veronderstelde dat al deze planeten draaiden om een "centraal vuur". Aangezien hij ook met het centrale vuur maar tot negen hemellichamen kwam veronderstelde hij dat er ergens nog een tiende, verborgen hemellichaam moest zijn. Dit verborgen hemellichaam noemde hij de anti-aarde; het zal, evenals het centrale vuur, nooit te zien zijn. Hiermee bevatte het door Pythagoras uitgewerkte "heelal" het perfecte aantal lichamen, namelijk 10, waaruit wederom blijkt hoe belangrijk dat getal voor hem was.
De afstanden tot de planeten waren in de tijd van de Pythagorische Orde ongeveer bekend. Pythagoras ontdekte dat de stralen van deze banen zich net zo tot elkaar verhielden als de tonen in een octaaf, de verhoudingen die hij zelf eerder had ontdekt bij snaren. Omdat de planeten in dezelfde "muzikale verhouding" stonden tot het centrale vuur als de muzikale intervallen, bedacht Pythagoras dat er in het heelal een soort klank aanwezig was, veroorzaakt door de bewegingen van de planeten. Deze klank noemde hij de Harmonie der Sferen. Omdat dit geluid continu aanwezig was viel het door mensen niet waar te nemen.

De ontdekking dat de verhoudingen tussen de stralen van de cirkels die de hemellichamen beschreven zich lieten uitdrukken in breuken van gehele getallen was op zich voor de Pythagorische Orde al een bewijs van hun overtuiging dat de werkelijkheid wiskundig was. Dat deze verhoudingen óók nog overeenkwamen met de verhoudingen van de muzikale intervallen maakte het geloof in de wiskundige werkelijkheid helemaal onwrikbaar.

De stelling van Pythagoras
De stelling van Pythagoras is wereldwijd een van de bekendste wiskundige formules. Hij is echter niet door Pythagoras (of zijn school) ontdekt maar was al lange tijd bekend bij de Babyloniërs. De reden dat deze stelling alsnog naar Pythagoras is vernoemd is dat het oudste bekende bewijsmateriaal afkomstig is van de Pythagorische Orde. Er zijn zeer veel verschillende manieren om de stelling van Pythagoras te bewijzen[3]. Het meest waarschijnlijk is dat de Pythagorische Orde deze stelling heeft bewezen met behulp van vierkanten die op de zijden van een driehoek gezet werden. Het bewijs leveren deden ze niet door middel van de oppervlakten uidrukken in kwadraten van getallen zoals wij dat nu doen. Zij deden dat door simpelweg de kleine vierkanten "kapot te knippen" en die in het grote vierkant op de schuine zijde te leggen (zie de afbeelding hieronder).



Dat de Pythagorische Orde het bewijs van deze stelling zo duidelijk en onwrikbaar vastlegde was voor die tijd zeer bijzonder. De overtuiging dat de werkelijkheid wiskundig was werd hierdoor gesterkt.

De ondergang van de Pythagorische Orde
Toch heeft deze stelling gezorgd voor de ondergang van de Pythagorische Orde. Na bewezen te hebben dat deze stelling altijd geldig is kwamen ze erachter dat er voor een rechthoekige driehoek met twee gelijke benen deze stelling niet altijd uit te rekenen is met behulp van enkel gehele, zuivere getallen. Men moest namelijk de wortel nemen van getallen waardoor ze in een oneindig aantal decimalen verstrikt raakten. Dit liet de Pythagorische Orde schudden op zijn grondvesten. De overtuigen dat de gehele werkelijkheid in gehele getallen te vatten was viel aan duigen. Angstvallig werd dan ook geprobeerd dit slechte nieuws binnen de school te houden, wat helaas mislukte.

Conclusie
Pythagoras kwam aan de hand van verschillende eigen ontdekkingen van die van medewetenschappers en filosofen uit zijn tijd tot de conclusie, dat de gehele werkelijkheid wel wiskundig moest zijn. Vooral het feit dat hij de muzikale verhoudingen terugvond in zowel de muziek als de astronomie leverde hieraan een grote bijdrage. Dat die verhoudingen in meerdere dingen terugkwamen betekende voor Pythagoras dat de wiskunde, hoewel nog onontdekt, ook in andere dingen schuilging.
Ook zijn aanbidding van de perfectie en exactheid van de wiskunde droeg hieraan bij. Hij verhief de wiskunde tot een soort levensbeschouwing met zichzelf als leider. De verering van de wiskunde heeft hij voor een groot deel uit Egypte meegenomen maar ook zijn eigen studie (die in eerste instantie de volmaaktheid van de wiskunde met gehele getallen alleen maar leek te bevestigen) maakte dat hij de wiskunde zag als iets bovennatuurlijks.
Hieruit concludeerde hij dat de wiskunde de oerkracht achter de wereld moest zijn en dat deze dus ook in alle verschijnselen verborgen moest zitten.

[3] Kijk op http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ voor 43 verschillende bewijzen van de stelling van Pythagoras

Wiskunde is perfect in theorie

Biografie

Uit de verschillende bronnen die wij hebben bekeken blijkt dat er grote twijfels zijn over de persoon Euclides. Volgens sommigen was Euclides een persoon die werkelijk heeft bestaan en *de Elementen* geschreven heeft. Anderen zeggen echter dat Euclides het hoofd was van een soort wiskundige genootschap. De werken van Euclides zouden dan niet alleen van hem zijn maar een soort samenstelling van de werken van hem en zijn volgelingen, gepubliceerd onder zijn naam. Weer een andere kant van het verhaal is dat *de Elementen* van Euclides helemaal niet door hem geschreven zijn. Zij zouden zelfs zo'n honderd jaar na zijn dood zijn geschreven door verscheidene wiskundigen en gepubliceerd onder zijn naam. Dit laatste zou ook de verschillende namen verklaren die aan de schrijver van *de Elementen* gegeven worden. Soms is dit Euclides van Alexandrië, soms Euclides van Megara.
Wij gaan er in dit werkstuk echter vanuit dat Euclides daadwerkelijk bestaan heeft en ook écht *de Elementen* geschreven heeft. De informatie die we daar over vonden lijkt heel betrouwbaar.

Euclides (430-370 v. Chr.) stortte zich al van jongs af aan op de wiskunde en de filosofie. Uit de werken van Parmenides leerde hij de kunst van het discussiëren. Onder de indruk van de ideeën van Socrates en zijn redevoeringtechnieken besloot hij naar Athene te gaan om daar van hem les te krijgen. Toen hem, en zijn landgenoten, verboden werd Athene nog binnen te gaan besloot hij net buiten de stad te gaan wonen. Het verhaal gaat dat hij nog lange tijd, verkleed als vrouw, 's nachts naar de stad ging om alsnog les te krijgen. Dit geeft een beeld van zijn vastberadenheid en zijn wil om te leren. Socrates had een hekel aan de grote openbare discussies waar Euclides geregeld aan meedeed. Dit is uiteindelijk ook de reden geweest van de scheiding tussen Socrates en Euclides.
Na zijn breuk met Socrates keerde hij terug naar Megara waar hij een school stichtte. Daar gaf hij les in discussiëren en filosofie. Plato is een aantal jaren zijn leerling geweest.
Euclides geloofde in het "zijn" en in het "goede". Dit combineerde hij, vrij logisch, tot het "goede dat ís". Hiermee zei hij tevens dat het kwaad niet echt bestond. Het kwade was meer een soort afwijking van het goede.

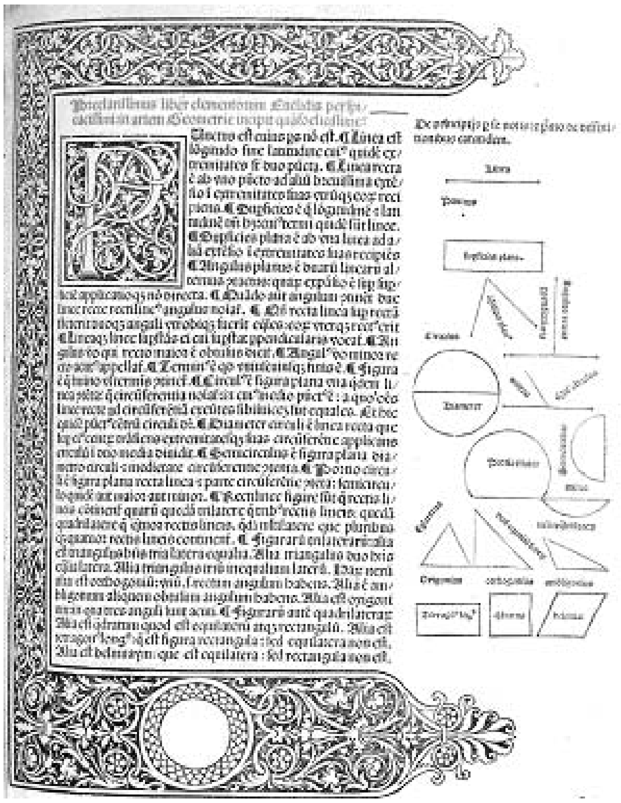
Euclides en zijn betekenis voor de wiskunde

Euclides heeft een belangrijke rol gehad in het universeel maken van de wiskunde. Niet zozeer omdat hij zoveel nieuwe stellingen of oplossingen heeft gevonden maar omdat hij in zijn boek *de Elementen (Stoicheia)* de hele basis van wiskundige stellingen logisch afleidt en uitwerkt. De onderwerpen waar deze stellingen over handelen variëren van de vlakke meetkunde en de astronomische meetkunde tot de theoretische muziekleer. Tevens introduceerde hij onder andere de begrippen driehoek, kwadraat, cirkel, probleem, basis, definitie, axioma en parallel. Hierdoor ontstaat dan eindelijk een vast wiskundig stelsel waarmee consequent gewerkt kan worden. Veel van deze wiskundige regels gebruiken we nu nog steeds om stellingen te bewijzen en te rekenen in meetkundige figuren. In dit vijftien boeken tellende werk is tot op de dag van vandaag maar één onvolmaaktheid aangetroffen. Dit betreft het "parallellenaxioma". Hierin stelt hij dat twee evenwijdige lijnen, verlengd tot in het oneindige, elkaar nooit zullen snijden. Hoewel dit op het eerste gezicht logisch lijkt, en er in onze huidige wiskunde nog steeds van uit wordt gegaan, is bewezen dat deze stelling niet te bewijzen valt.

Euclides en Plato

Van Euclides is bekend dat hij een bewonderaar van Plato is geweest ook al was hij zijn leermeester. Veel van Plato's ideeën over de wiskunde heeft hij dan ook overgenomen. Zo had Euclides evenals Plato een grote minachting voor de praktische en empirische wiskunde. Euclides geloofde ook in de perfectie van de wiskunde, maar dan wel alleen van de theoretische wiskunde. Deze mocht niet bezoedeld worden door er imperfecte afbeeldingen van te maken en daar de wiskunde op te baseren. De combinatie taal en wiskunde hield Euclides ook bezig. Hij vroeg zich af in hoeverre de wiskunde te beschrijven was met taal. Hoewel hij in zijn boek(en) veel gebruik maakt van taal en weinig van wiskundige notaties, blijkt dat hij zich toch niet optimaal kan uiten in taal. Wanneer er moeilijke berekeningen gedaan worden gaat hij snel over op tekeningen. Hieruit kun je concluderen dat voor Euclides de taal nóg minder geschikt was om de wiskunde mee te bedrijven dan afbeeldingen.

Dat wiskunde volgens hem niet in woorden weer te geven was geeft aan dat hij de wiskunde als een apart "iets" beschouwt, en dat het puur is. Wanneer je probeert dit weer te geven in woorden geef je slechts een omschrijving van de wiskunde en ben je dus niet meer objectief.



De elementen
In de eerste pagina van zijn *Elementen* geeft Euclides 23 definities weer. Hierin stelt hij vast wat bijv. verstaan moet worden onder een rechte lijn, punt en driehoek.
De Elementen opent met een 5-tal stellingen, de zogenaamde axioma's. Deze geven een soort startkader met vooronderstellingen. Deze vijf axioma's in *de Elementen* zijn geen specifieke meetkundige eigenschappen, maar meer 'vanzelf-sprekende waarheden' die je niet kunt veranderen.
Ze luiden als volgt:

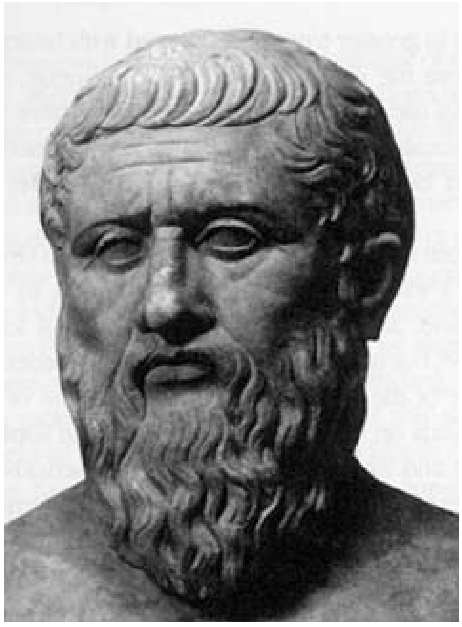
- Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde zijn ook gelijk aan elkaar.
- Als je bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.
- Als je van gelijke dingen gelijke afneemt, dan zijn de resten gelijk.
- Dingen, die op elkaar passen, zijn gelijk.
- Het geheel is groter dan het deel.

Wanneer één van deze gewijzigd zou worden zouden alle volgende boeken van Euclides nutteloos worden omdat de stellingen die daarin beschreven worden niet meer te bewijzen zouden zijn. Het feit dat Euclides deze vooronderstellingen nodig heeft geeft aan dat zijn wiskundige stelsel niet persé hoeft te berusten op de werkelijkheid. Euclides onderkent dit zelf ook maar verwijst naar de ideeën (a-priori kennis) van zijn voorbeeld Plato. Hij zegt dat ieder mens wéét dat zijn postulaten waar zijn. Hoewel dit ook wel lijkt te kloppen is dit natuurlijk geen bewijs.
Hiermee wijkt hij af van zijn overtuiging dat de wiskunde puur theoretisch en bewijsbaar moet zijn. Hij heeft echter geen andere mogelijkheden wil hij een goede wiskundige fundering leggen.

Conclusie
Hoewel Euclides niet direct doorgaat op wat Pythagoras heeft ontdekt en beschreven ziet hij de wiskunde wel als een zeer bijzondere en machtige wetenschap. Hij komt niet tot de conclusie dat de werkelijkheid wiskundig is maar verwerpt deze gedachte evenmin. Zijn idee over de wiskunde valt meer samen met de ideeën die Plato erover had. De wiskunde is dus volgens hem perfect maar zal door de mensen slechts theoretisch correct gebruikt kunnen worden. In de praktijk zullen de mogelijkheden van mensen tekort schieten om de perfecte wiskunde te gebruiken.

Wiskunde als brug tussen de ideeënwereld en de voor ons waarneembare wereld

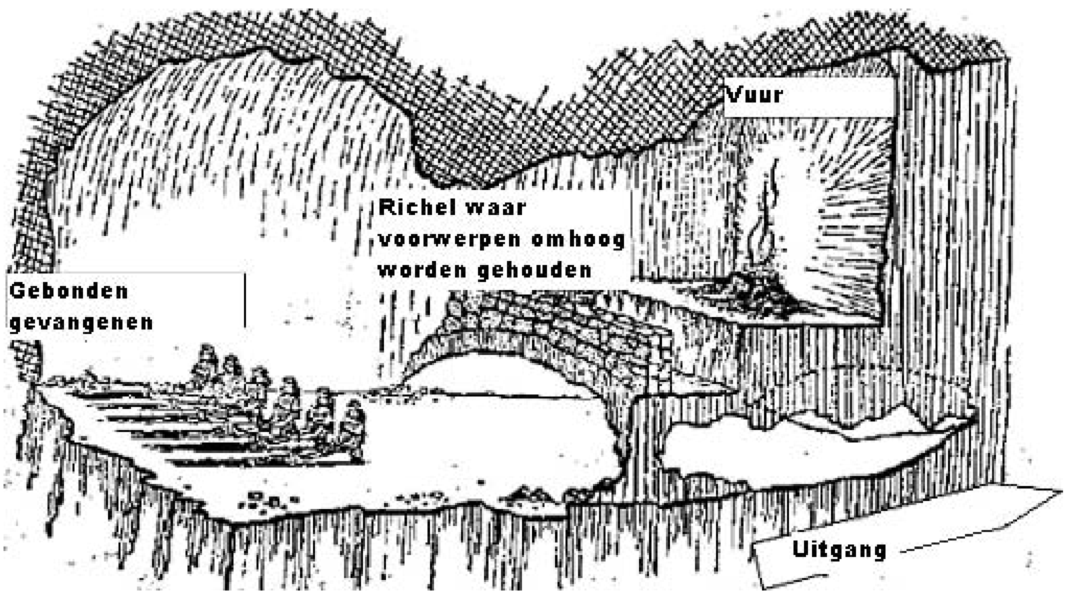
Biografie



Plato (428 - 348 v. Chr.) is geboren in Athene. Hij groeide op in een rijk gezin. Hierdoor kreeg hij al van jongs af aan toegang tot de beste scholen en leermeesters. Op zijn twintigste ontmoette hij Socrates, waar hij zo'n acht tot tien jaar les van heeft gekregen. Hoewel hij al langer geïnteresseerd was in het verkrijgen van wijsheid heeft hij zich daar onder invloed van Socrates helemaal op gestort. Hij raakte geïnteresseerd in wiskunde, discussietech-nieken en poëzie.
Na de dood van Socrates sloot hij zich aan bij een filosofische school in Megara onder leiding van Euclides. Hij bezocht veel landen, waaronder Egypte en Sicilië. Daar bestudeerde hij vooral verschillende staatssystemen en probeerde zelf een eigen ideaal systeem te creëren. In zijn zoektocht naar een perfecte samenleving stootte hij enkele belangrijke personen tegen de schenen. Hierdoor belandde hij in de gevangenis en werd later verkocht als slaaf. Nadat hij door een vriend vrijgekocht was ging hij terug naar Athene. Hier wijdde hij zich aan het lesgeven van zijn leerlingen tot hij overleed op 80-jarige leeftijd.

De allegorie van de grot

Een van Plato's bekendste werken is de Allegorie van de Grot, ook wel de Grotvergelijking genoemd. Plato probeerde hierin duidelijk te maken hoe, volgens hem, de perfecte ideeënwereld en de waarneembare wereld zich tot elkaar verhielden.Volgens Plato waren alle dingen die wij waar kunnen nemen slechts afspiegelingen van "de perfecte ideeën". Men kan zich hierbij een transcendente wereld voorstellen waarin alle perfecte ideeën huizen.



Stel je een grot voor, zoals weergegeven in de afbeelding op pagina 7, waarin een groep mensen opgesloten zit. Ze kunnen enkel naar de wand voor zich kijken. Op deze wand zien zij schaduwen van voorwerpen die door mensen op het pad omhoog worden gehouden. Het vuur is hier de "bron" van de schaduwen die de gevangenen waarnemen. Zij zullen de schaduwen beschouwen als de enige echte werkelijkheid, simpelweg omdat ze heel hun leven niks anders gezien hebben. Zij zullen overleggen over de verschillende vormen die ze langs zien komen en ze zullen langzaamaan vormen die eerder langs zijn gekomen gaan herkennen. De meest wijze persoon zal dan diegene zijn die het snelste de schaduwen van elkaar kan onderscheiden en benoemen.

Dit gedeelte van de allegorie van de grot slaat op de werkelijkheid zoals wij mensen die waarnemen. We gaan er over het algemeen van uit dat datgene wat we waarnemen ook de werkelijkheid is. De schaduwen die op de achterkant van de grot geprojecteerd worden symboliseren de dingen die wij zien. Dit impliceert dat de dingen die wij waarnemen slechts afspiegelingen zijn van het eigenlijke ding. Volgens Plato zijn onze waarnemingen afspiegelingen van de ideeën, de zuivere oervormen.

Stel je nu voor dat één van deze mensen losgemaakt wordt en naar de uitgang geleid wordt. Zou deze persoon niet verblind worden door het zonlicht? Hij zou uren nodig hebben om te wennen aan het felle zonlicht en de scherpe contouren van de voorwerpen die hij ziet. Langzaamaan zal hij sommige voorwerpen gaan herkennen als de voorwerpen waar hij al eerder in de grot de schaduwen van heeft gezien. Tevens zou hij bedenken dat hij in de grot slechts de schaduwen zag en niet de werkelijke dingen. Hij zou ontdekken dat hij nu pas de echte dingen ziet en dat niet het vuur in de grot maar de zon de lichtbron is. Alles wat hij nu ziet is mooier dan de schaduwen in de grot en hij zal dit graag aan zijn medegrotbewoners willen laten zien.

Als hij terug is in de grot en de vastgebonden mensen vertelt wat hij zojuist heeft waargenomen zullen deze hem voor gek verklaren. Zij weten immers niet beter dan dat de schaduwen de enige echte werkelijkheid zijn. Hoe goed de bevrijde gevangene ook zijn best doet de andere te overtuigen van de schoonheid en échtheid van de objecten buiten de grot, zij zullen weigeren met hem mee te gaan.

De bevrijde gevangene die buiten de grot beseft dat hij nu eindelijk de werkelijkheid heeft ontdekt symboliseert in dit geval Plato of een andere persoon die gelooft in de ideeënwereld. De ideeënwereld wordt in deze allegorie gesymboliseerd door de wereld buiten de grot. Daar ziet de ex-gevangene pas dat hij al die tijd in de grot slechts naar vage afspiegelingen van de werkelijkheid heeft zitten kijken. Plato wil hiermee duidelijk maken dat, wanneer wij werkelijk beseffen dat er boven de voor ons waarneembare wereld de ideeënwereld bestaat, wij ook zo zullen terugkijken op de tijd dat we geloofden dat de waarneembare ook de werkelijke wereld was.

De ideeën kennen wij a-priori, niet bewust maar ze zijn wel degelijk aanwezig. Wanneer we dan een afzonderlijk voorwerp waarnemen correspondeert dat met de idee van dat voorwerp. Hierdoor zijn we in staat te abstraheren. Want hoewel er duizenden verschillende soorten bomen zijn kunnen we toch een boom als dusdanig herkennen, ongeacht of hij veel of weinig bladeren en takken heeft. De essentie, de idee van de boom herkennen wij in onze waarneming.

De allegorie van de grot en wiskunde

Zoals bijna alle filosofen in zijn tijd was ook Plato buiten de filosofie geïnteresseerd in wiskunde. Hij gebruikte de abstracte wiskunde veelal als denkoefening in de logica en hield zich nauwelijks bezig met het onderzoeken of bewijzen van stellingen. Plato was er ook van overtuigd dat de wiskunde losgemaakt moest worden van het materiële. Wiskunde moest puur theoretisch worden gehouden door, zonder gebruik te maken van figuren of tekeningen, bewijs te leveren voor iedere stelling enkel en alleen door te denken. Plato heeft in historisch perspectief nauwelijks een bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de wiskunde. De reden dat hij toch hier vernoemd wordt is het feit dat hij de wiskunde combineerde met zijn Allegorie van de Grot en dat het daarin ook een belangrijke maar redelijk onbekende rol speelt.

Allereerst was wiskunde voor Plato een aantrekkelijke wetenschap omdat het zo abstract is en dat er uit elke wiskundige vergelijking ook één of meerdere antwoorden komen. Wat dus voor Plato de doorslag gaf was dat de wiskunde perfect is, evenals de ideeënwereld. Het getal 1 bijvoorbeeld verschilt in onze waarneembare wereld in niets van de idee 1. Alle getallen hebben een vaste, exact bepaalde en onveranderlijke betekenis. Het getal 1 drukt vandaag maar ook in de toekomst altijd één uit.

Een ander goed voorbeeld van de exacte betekenis van getallen is het getal π[4] (pi). Dit is namelijk een van de getallen die niet exact in decimale getallen is weer te geven. Tegenwoordig kunnen we π wel weergeven tot op een miljoen decimalen nauwkeurig maar toch zullen we nooit het exacte getal p vinden. Toch bestaat het exacte getal π wel volgens Plato maar huist dit in de ideeënwereld.

Zo is er ook het getal e[5], evenals π niet exact decimaal weer te geven maar in theorie is er wel een exacte waarde. Het getal e is zo bijzonder omdat de formule van de afgeleide[6] van e^x zelf ook e^x is.

De allegorie van de grot en meetkunde

De meetkundige figuren[7] huizen eveneens in de ideeënwereld. Zo is een cirkel door mensen of de natuur gemaakt nooit helemaal perfect terwijl de idee cirkel exact rond is. De cirkel werd in die tijd ook gezien als de perfecte figuur in het platte vlak, de bol als perfecte ruimtelijke figuur. Hoe nauwkeurig we ook proberen een cirkel (of ander meetkundig figuur) te tekenen of te maken, het zal altijd imperfect blijken. Wanneer we echter spreken over een cirkel blijft deze perfect. De eventuele tekening die gemaakt moet worden dient om te kunnen visualiseren waaraan men aan het rekenen is maar de cirkel zelf waaraan gerekend wordt kan nooit correct weergegeven worden.

Conclusie

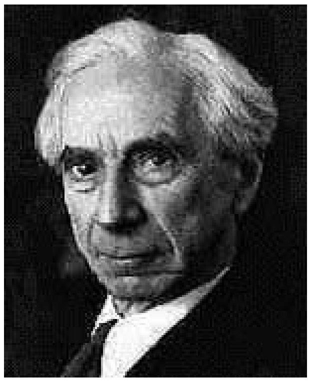
Het bijzonder van de wiskunde is dus dat het een directe link tussen de ideeënwereld en de voor ons waarneembare wereld legt. Het is namelijk voor zover we konden achterhalen het enige idee (of combinatie van ideeën) dat in de waarneembare wereld goed gehanteerd kan worden zonder te vervallen tot een slechte afspiegeling van wat het werkelijk is. De werkelijkheid (voor Plato de ideeënwereld) ís dus niet wiskundig maar valt wel correct wiskundig te beschrijven zonder dat je de ideeën geweld aandoet. Plato onderkende zelf ook de speciale aard van de wiskunde, namelijk dat deze in zowel de ideeënwereld als in de waarneembare wereld identiek is. De conclusie die hieruit te trekken valt is dat volgens Plato de wiskunde een idee op aarde is en dus perfect. Tevens moet hij dan onderkennen dat de mens (nog) niet perfect is omdat wij niet alle getallen goed kunnen hanteren (kijk naar getallen als *e* en π).

[4] π » 3.14159265358979323846264338322795
[5] e » 2.718281828
[6] De afgeleide van een vergelijking geeft op ieder punt van de grafiek van die vergeliijking de steilheid ervan
[7] bijv. bol, piramide, kubus, balk en cilinder

"De uitspraak van Pythagoras is onzin", of toch niet?

"Naar huidige maatstaven geïnterpreteerd, uit een logisch standpunt bezien onzin, maar wat Pythagoras ermee bedoelde was geen onzin." [8]

Biografie



De in Wales geboren Betrand Arthur William Russell (1872-1970) behoort tot de belangrijkste filosofen van de twintigste eeuw. Hij wordt beschouwd als een van de grondleggers van de analytische filosofie. Een stroming binnen de filosofie die streng onderzoek verricht naar belangrijke filosofische begrippen en de taal waarin ze gesteld zijn. Maar zijn echte reputatie heeft hij verkregen door zijn bijdrage op het gebied van mathematische logica en de filosofie. Een van zijn bekendste werken is zonder twijfel "Principia Mathematica[9]" dat hij samen met A.N. Whitehead geschreven heeft. De doelstelling van dit project was: "het aantonen dat de zuivere wiskunde geheel en al voortvloeit uit zuiver logische premissen en uitsluitend gebruikmaakt van de begrippen die in logische termen te definiëren zijn". Het P.M. was niet het enige dat Russell gedurende zijn leven geschreven heeft. Hij heeft ongeveer 60 tot 70 gepubliceerde boeken geschreven over behoorlijk uiteenlopende thema's, enige voorbeelden daarvan zijn: Problems of Filosofy, History of Western Filosofie, Human Knowledge en The analysis of Matter. Maar ook over vele andere onderwerpen heeft hij geschreven, niet in de laatste plaats door zijn uitgesproken mening op het gebied van oorlog en vrede, moraal, seks, onderwijs en menselijke geluk.

Helaas volgt er geen duidelijke uitleg waarom hij stelt wat hierboven geciteerd staat, daarom zullen we het zelf op moeten maken uit andere werken, al dan niet van zijn eigen hand.

Kennis, fysica en wiskunde

Volgens Russell hebben de natuurwetenschappen de logisch-analytische filosofie van materiaal voorzien, naast de zuivere wiskunde. Ook is materie niet een van de elementaire bouwstenen waartoe de wereld in laatste instantie te herleiden valt maar geldt ze als niet meer dan een praktische manier om gebeurtenissen te groeperen. De natuurwetenschappen dienen zich bezig te houden met deze gebeurtenissen. De natuurwetenschappen hebben zich (en houden zich) bezig met het aloude probleem van de waarneming. Als er iets is dat "waarneming" mag heten, dan moet het, wil het kennis over een voorwerp opleveren, tot op zekere hoogte een effect zijn van dat waargenomen voorwerp, en er min of meer op lijken. Maar neem bijvoorbeeld onze waarneming van de zon, zodra de lichtgolven bij het menselijk oog zijn aangekomen doen zich allerhande dingen voor die elders niet plaats zouden vinden, met als resultaat dat, wat wij uitdrukken als "de zon zien." Hierdoor komen we echter over het fysische object (en dus fysische objecten in het algemeen) niet veel meer te weten dan een aantal abstracte, structurele eigenschappen.

We kunnen weten dat de zon in zekere zin rond is, ook al komt dat niet helemaal overeen met de manier waarop wat we zien rond is. Ook hebben we geen reden om te veronderstellen dat ze stralend of warm is, waar zouden we dat op moeten baseren. We voelen zelf niet rechtstreeks de straling of warmte van de zon. Maar de natuurwetenschap kan verantwoorden dat het wel zo is, zonder eerst aan te nemen dat het zo is. Gefundeerd zijn de natuurwetenschappen op de wiskunde, hieruit volgt dat onze kennis van de fysische wereld vooral wiskundig is.

Een van de soorten kennis die Russell erkent is de a-priorikennis van de waarheden van de logica en de zuivere wiskunde. Deze kennis is totaal onafhankelijk van enige ervaring en waarneming en komt als vanzelfsprekend voort uit de waarheden die we al kennen. Voorbeelden hiervan zijn A=A en 1+1=2. Wel moeten deze rekenkundige principes indien ze waarheid willen bezitten op fysische objecten van toepassing zijn. Twee fysische objecten en twee andere fysische objecten moeten samen vier fysische objecten opleveren. Dit ondanks dat we van de fysische objecten niets zeker kunnen weten (wordt in volgend gedeelte uitgelegd). Als we a-priori stellen dat 2 plus 2 vier oplevert dan geldt dit niet alleen binnen onze gedachten maar geldt dit voor alle mogelijke tweetallen. Op deze manier laat Russell merken dat het rekenkundig systeem van de zuivere wiskunde van toepassing is op de fysische wereld.

[8] Citaat van Russell uit "De geschiedenis van de westerse filosofie"
[9] Dit werk dat in het vervolg van dit hoofdstuk aangeduid zal worden met de afkorting P.M.

Ook stelt Russell[10] dat fysische objecten groepen zijn van verschijningen waarvan de materie zich laat beschrijven door de wetten van de fysica. Aangezien de fysische wetten (bijna) allemaal terug te leiden zijn tot wiskundige stellingen/functies moet de materie dus beschreven kunnen worden volgens wiskundige stellingen/functies.

Kennis van de wereld wordt dus volgens Russell onder andere verkregen door de natuurwetenschappen, die zich sterk laat beïnvloeden door de wiskunde. De fysica is een weergave van de fysische wereld die gebaseerd is op wiskundige stellingen. Hierbij komt de stelling dat we kunnen waarnemen dat stellingen uit de zuivere wiskunde overeenkomen met de fysische wereld.

Zintuiglijke waarnemingen

Aan de andere kant en dus enigszins in strijd met het hier bovenstaande stelt Russell dat we over fysische objecten niets zeker kunnen weten, hoogstens dat het correspondeert met onze zintuiglijke gegevens. Hiervoor moeten we een onderscheid maken in 1. Fysische ruimte en 2. Persoonlijke ruimte. Het eerste is de ruimte waarbinnen alle fysische objecten zich bevinden. Het tweede is de ruimte waarbinnen wij onze zintuiglijke gegevens plaatsen. Hierdoor moeten de posities van de fysische objecten in de fysische ruimte corresponderen met de positie in onze persoonlijke ruimte. Als we bijvoorbeeld aan een weg het ene huis dichter bij zien dan het andere zullen onze overige zintuigen de indruk dat het inderdaad dichter bij is bevestigen; het zal bijvoorbeeld als we onze weg vervolgen eerder bereikt worden. Maar wat kunnen we nu dan weten over de fysische ruimte? We kunnen alleen weten wat nodig is om die overeenstemming te verantwoorden. We weten niets over de fysische objecten zelf, alleen hoe ze naar ruimtelijke geordend zijn. Zo kunnen we van fysische afstanden nooit iets zeker zeggen, wel van afstanden in onze persoonlijke ruimte. Maar onze waarnemingen zijn onbetrouwbaar, wanneer we de zon zien, zien we eigenlijk de zon zoals hij er 8 minuten geleden uit zag.
Wanneer deze in de tussentijd op was gehouden met bestaan zouden we dat op grond van onze zintuiglijke waarnemingen niet weten.[11] Wat Russell hiermee eigenlijk stelt is dat onze zintuiglijke waarnemingen een onbetrouwbare bron zijn van onze kennis. Met onze zintuiglijke gegevens kunnen we ons hoogstens een beeld vormen van de werkelijke wereld om ons heen hoeveel dat beeld overeenkomt met de werkelijkheid blijft moeilijk. Daarom is ook de fysica (natuurkunde) maar een weergave van de werkelijkheid, een benadering, evenals de natuurwetenschappen.

Stellig laat Russell weten dat onze zintuiglijke waarnemingen en de daarmee verkregen kennis dus ook onbetrouwbaar zijn, fysica en natuurwetenschappen zijn maar een weergave van de werkelijkheid. Toch laat hij ook doorschemeren dat wanneer de zintuiglijke waarnemingen maar genoeg corresponderen met de fysische objecten we ze voor waar mogen aannemen. Maar dan komt een volgend probleem om de hoek. Hoe weten we of de zintuiglijke waarnemingen corresponderen met de fysische objecten?[12] Hoe de werkelijke wereld eruit ziet zullen we dus nooit te weten komen. Ook niet of deze zich richt naar de wetten van de wiskunde, of dat alles getal is.

Conclusie

Aan de ene kant stelt Russell dat de fysica en natuurwetenschappen de basis zijn voor onze kennis en dat de wereld zich laat beschrijven door de wetten van de fysica die zich weer baseren op de wiskunde. Maar vervolgens zet hij het hele systeem van zintuiglijke waarneming op losse schroeven door te zeggen dat we hoogstens een beeld hebben van de werkelijkheid en niets zeker weten over de fysische wereld. Toch kennen we de logica en de zuivere wiskundige stellingen a-priori, onafhankelijk van enige waarneming of ervaring. Wel kunnen we bekijken of deze stellingen ook opgaan voor de fysische wereld. Komen ze voldoende overeen dan mogen we ze voor waar aannemen. Russell blijft dus wel twijfelen aan onze zintuiglijke waarneming, maar ziet ook in dat de zuivere wiskunde overeenkomt met de fysische wereld. Dat er getal is in de fysische wereld staat dus eigenlijk vast[13] maar dat alles getal is wordt door Russell niet onderbouwd.

[10] In zijn boek Mystiek en Logica
[11] Dat er fysische objecten bestaan buiten onze zintuiglijke waarneming neemt Russell aan doordat het voor hem niet voor te stellen is dat bijv. een tafel weg is wanneer we onze ogen sluiten, en onze arm van de tafel optillen. Maar zodra we onze ogen opendoen en onze arm terugleggen de tafel weer “terugkomt” en dus weer bestaat.
[12] Op dit punt lijkt Russell uit de bestudeerde literatuur een beetje in een tweestrijd.
[13] Zeker als je ook de fysica die volgens wiskundige wetten werkt erbij betrekt

We kunnen het niet weten want we kunnen er niet buiten

Biografie

Geboren in wat nu Brno is (Tsjechië) is hij waarschijnlijk een van de belangrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw. Hij heeft laten zien dat de wiskunde nog niet voltooid is en dat een computer nooit zo geprogrammeerd kan worden om alle wiskundige vraagstukken op te lossen. Hij toonde aan dat geen enkel vaststaand stelsel, hoe gecompliceerd ook, de complexiteit weer kan geven van de gehele getallen en maakte het P.M.[14] van Russell en Whitehead volledig vleugellam evenals vele andere werken. We hebben het hier natuurlijk over Kurt Gödel. (1906-1978) De theorie (of eigenlijk stelling) waarmee Gödel beroemd is geworden zal hieronder kort besproken worden, om een beeld te geven wat Gödel's ideeën waren.

De stelling van Gödel

Een ontdekking die Gödel deed was deze: Er zit in de wiskundige stelsels een merkwaardige lus, die haar oorsprong in oeroude intuïties vindt. Op de simpelste wijze verteld, is de ontdekking van Gödel de vertaling in wiskundige termen van een oeroude paradox uit de filosofie: "Alle mensen op het eiland Kreta zijn leugenaars". Geformuleerd door Pimenides die destijds op het eiland Kreta leefde. Scherper geformuleerd staat er dus: "Deze uitspraak is onwaar" of "ik lieg". Wat je ook met deze uitspraak doet, zij komt altijd terug op het omgekeerde. Maar het was niet makelijk om deze uitspraak te vertalen in wiskundige termen omdat je met taal heel makkelijk iets kunt zeggen over taal, maar het erg moeilijk wordt om een wiskundige uitspraak te doen die naar zichzelf verwijst. Gödel loste dit op door gebruik te maken van wiskundige redeneringen bij het verkennen van de wiskundige redeneringen zelf. Hij maakte de wiskunde dus introspectief, hetgeen een sterke kracht bleek in zijn ideeën. Deze introspectie van de wiskunde leidde tot de "Stelling van Gödel" of de "Onvolledigheidstelling" (gepubliceerd in 1931).
Maar het introspectief maken van de wiskunde is niet zo makkelijk als hierboven geschetst wordt, ook voor een genie als Gödel ging hier veel denkwerk aan vooraf. Zo moesten er van tevoren een aantal definities en afspraken vastliggen:

- Wiskundige uitspraken (geconcentreerd op getaltheoretische uitspraken) gaan over eigenschappen van gehele positieve getallen en nul, de natuurlijke getallen.
- Gehele getallen noch hun eigenschappen zijn uitspraken.
- Een uitspraak in de getaltheorie gaat niet *over* een uitspraak in de getaltheorie; zij is een uitspraak *in de* getaltheorie.

Gödel wilde dat getallen op de een of andere manier de plaats in konden nemen van uitspraken, hiervoor heeft hij zijn eigen getallensysteem (een soort code) opgezet, ook wel Gödelgetallen genoemd. Hiermee kunnen zowel uitspraken in de getaltheorie maar ook over de getaltheorie gedaan worden.

TNT

Een korte schets met daarin de basisprincipes van het TNT (Theoria Numerorum Typografica) volgt hieronder. Het geven van een volledige uitwerking van het TNT zou een heel boekwerk vereisen en ook overbodig zijn.TNT is een systeem dat de eigenschap bezit zichzelf te omsluiten. Dit omdat de constructie die Gödel toepast zowel de vorm als de inhoud van strengen van het formele systeem beschrijft.[15] In dit vreemde systeem wordt de vorm van de strengen beschreven binnen het formele systeem zelf. Het TNT is opgebouwd met een eigen aanduiding voor de getallen:

Nul: O
Een: VO
Twee: VVO
Drie: VVVO

Hetgeen vrij simpel te begrijpen is als: Twee: vvo = Volgt op Volgt op Nul. Daarbij komen de uitdrukkingen: $\exists$, dat staat voor "er is/zijn" en $\forall$, dat betekent "voor alle geldt". Dan al kunnen bijvoorbeeld de zinnen:

Er is een getal B zodanig dat B plus 1 gelijk is aan 2

[14] Principa Mathematica
[15] Strengen zijn hetzelfde als de hedendaags meer gebruikelijke benaming formules

En *Voor alle B is B plus 1 gelijk aan 2*

Vertaald worden tot de (wiskundige) codering:

$\exists$B:(B+VO)=VVO
En $\forall$ B:(B+VO)=VVO

Belangrijk hierbij is dat dit geen uitspraken over ongespecificeerde getallen meer zijn; de eerste is een existentiële bewering en de tweede een universele bewering. Wanneer deze codering uitgebreid wordt met onder andere variabelen (zoals Gödel gedaan heeft dus) kunnen grote wiskundige beweringen samengesteld worden in een wiskundige taal met de specifieke eigenschap van het TNT, zichzelf omsluiten.

Aangezien de originele formulering van de stelling van Gödel

"Met iedere ώ-consistente recursieve klasse k van formules corresponderen recursieve klasse-symbolen r, zodat noch v Gen r, noch Neg (v Gen r) behoort tot Flg (k) (waarbij v de vrije variabele is van r)

niet zomaar te begrijpen is volgt hier de parafrase in begrijpelijke taal:

"Alle consistente[16] axiomatische[17] forrmuleringen van de getaltheorie bevatten onbeslisbare proposities[18]

Hieruit valt niet meteen de paradox uit te halen waar we het eerder over gehad hebben, deze merkwaardige lus zit veel meer in de bewijsvoering. Toen Gödel zijn coderingssysteem volledig had uitgewerkt moest hij de paradox van Epimenides over brengen in een getaltheoretisch formalisme. "Deze uitspraak in de getaltheorie heeft geen enkel bewijs"[19]
Het vaste stelsel van getaltheoretisch redeneren waarnaar Gödels woord "bewijs" verwees was dat van het P.M. Als gevolg daarvan zou je de stelling nogmaals kunnen herschrijven tot:

"Deze uitspraak in de getaltheorie heeft geen enkel bewijs in het stelsel van de Principe Mathematica"

Gevolgen van theorie
Het stelsel van P.M. is onvolledig want er zijn ware uitspraken in de getaltheorie die niet bewezen kunnen worden, omdat haar bewijsmethoden tekort schieten. Maar omdat Gödel in zijn artikelen spreekt over "en soortgelijke systemen" haalt hij niet alleen het P.M. onderuit maar alle axiomatische stelsel met dezelfde doelstelling als dat van Russell en Whitehead. Dit omdat de consistentie van een systeem niet binnen dat systeem zelf kan worden aangetoond, hetgeen verregaande gevolgen had. Onder andere kwamen de opvattingen van de Euclidische meetkunde in gevaar, evenals de verzamelingenleer van Georg Cantor.

Conclusie
Wanneer we deze vrij complexe theorie van Gödel in verband gaan brengen met de stelling: "Alles is getal", zijn er een aantal dingen die van belang zijn. Gödel zelf had bedacht dat zijn wiskunde geheel los staat van de werkelijkheid. Voor de praktijk is het veel handiger om allemaal volgens één wiskundig stelsel te werken. Zo is er best een wiskundig systeem waarin 1+1 geen 2 is, maar dat zou bijvoorbeeld bij de banken al een groot probleem opleveren. Hieruit is op te maken dat een wiskundig systeem eigenlijk wel afgeleid kan worden aan de werkelijkheid, maar Gödel zal niet beweren dat alles zich laat bepalen door één en het zelfde wiskundig systeem of überhaupt door een wiskundig systeem laat bepalen. Waar we het ook naar kunnen vertalen is bijvoorbeeld het eigen leven. het is niet mogelijk om over je eigen leven te denken, hiervoor zou je buiten jezelf moeten komen. Hetgeen onmogelijk is, ondanks dat sommigen de indruk hebben dat dit wel kan. Zoiets gaat natuurlijk ook op wanneer we iets willen zeggen over het al dan niet wiskundig zijn van de werkelijke wereld. Er buiten treden kunnen we niet, maar binnen een formeel systeem kunnen we datzelfde systeem niet bewijzen.

16 Vrij van innerlijke tegenspraak
17 Als waarheid aangenomen
18 Stellingen
19 Bewijzen is in dit geval het aantonen binnen vaste stelsels van proposities

Conclusie

Plato kon zich niet geheel vinden in het idee van Pythagoras dat de werkelijkheid wiskundig zou zijn. Hij onderkende wel dat de wiskunde een zeer bijzondere wetenschap was. Volgens Plato was de wiskunde zelfs het enige dat zowel in zijn ideeënwereld als in onze waarneembare wereld identiek was. De idee wiskunde is hier op aarde nog net zo puur als het in de ideeënwereld is. Hier komt echter een eind aan als we de wiskunde met taal of tekeningen proberen te vangen. Wiskunde moet puur blijven, wat in dit geval theoretisch is. Wanneer wij de wiskunde op deze manier behandelen kunnen we objectief praten over ideeën, iets wat bij andere wetenschappen onmogelijk is.
Het beeld van Plato dat de werkelijkheid niet op deze wereld maar in de ideeënwereld is, strookt dus niet met het idee van Pythagoras dat de werkelijkheid wiskundig is. Wel bevinden de werkelijkheid en de wiskunde zich in één en dezelfde wereld naast elkaar volgens Plato, namelijk in de ideeënwereld. Toch zag hij wel in dat de wiskunde goed van toepassing kon zijn in de samenleving. Plato was echter van mening dat bij praktische toepassingen van een ánder soort, minderwaardige en minder pure, wiskunde gebruik gemaakt moest worden. Dit doordat verschillende praktische toepassingen niet mogelijk waren zonder over te gaan op beschrijvingen van de wiskunde of uit te gaan van onbewezen stellingen.
Ook Euclides hing de theorie van de wiskundige werkelijkheid van Pythagoras niet aan, maar verwierp deze evenmin. Hij volgde Plato in zijn idee dat de wiskunde één van de weinige pure wetenschappen was. Deze moest dan ook puur theoretisch beoefend worden omdat men anders zou vervallen in de praktische wiskunde. Deze was voor hem minderwaardig. Wel geloofde hij dat vele fenomenen in onze waarneembare wereld wel degelijk correct wiskundig te beschrijven zijn. Wanneer we hiermee echter beginnen te rekenen, zo geloofde hij, zou al snel blijken dat wij met onze beperkte mogelijkheden zullen vervallen tot een omschrijving van de wiskunde. Hiermee zouden wij de pure wiskunde geen recht doen.
Euclides heeft veel gebruik gemaakt van deze zogenaamd minderwaardige wiskunde om zijn boek(en) *de Elementen* te schrijven. Hieruit blijkt dat hij zich, op grond van zijn overtuigingen, in een moeilijk parket bevond. Aan de ene kant wilde hij de pure wiskunde respecteren maar aan de andere kant wilde hij een zo goed mogelijke, hanteerbare wiskundige fundering leggen. Hij moest dus schipperen tussen zijn twee verlangens en heeft uiteindelijk besloten toch voor de praktische wiskunde te kiezen door *de Elementen* te schrijven.
Zoals te lezen is aan het einde van het hoofdstuk over Gödel is hij het niet eens met de stelling dat alles getal is. Hij zegt dat de wiskunde los staat van de werkelijkheid en we in het dagelijks leven één wiskundig systeem moeten gebruiken. Dit wiskundige systeem kan wel afgeleid worden van de werkelijkheid maar *is* nooit de werkelijkheid. Doordat Gödel stelt dat een systeem niet binnen dat systeem te bewijzen valt zouden we nooit kunnen bewijzen dat onze werkelijkheid wiskundig is omdat we daarvoor buiten de werkelijkheid zouden moeten kunnen komen, iets dat echter onmogelijk is. Voor Gödel geldt dus ongeveer hetzelfde als voor Euclides hoewel een wiskundig systeem zo te maken is dat het perfect op de werkelijkheid past. Dit wil nog niet wil zeggen dat de werkelijkheid ook op de wiskunde past.
Dit komt weer sterk overeen met wat Russell zegt, namelijk dat de wereld zich laat beschrijven door de fysica die zich weer baseert op de wiskunde. Wel maakt Russell zijn grote twijfel kenbaar over de mate waarin we kennis, door waarneming verkregen, kunnen vertrouwen. Hij ziet in de stelling 'alles is getal' dus nog iets meer dan Gödel, omdat de zuivere wiskunde overeenkomt met de werkelijke wereld. Gödel stelt dat we het nooit kunnen weten over het wiskundig zijn van de werkelijke wereld omdat we er niet buiten kunnen en we er dus niets met zekerheid over kunnen zeggen.
Euclides, Gödel en Russell zitten dus ongeveer op dezelfde lijn, Plato is de enige die echt een totaal andere invalshoek heeft vanwege zijn ideeënwereld. Het blijkt dus dat, hoewel alle personen die we belicht hebben wel degelijk bezig zijn geweest met het onderzoeken of de werkelijkheid wel of niet wiskundig is, geen van de filosofen en wiskundigen de stelling “Alles is getal” écht onderschrijft. Wel onderkennen ze allemaal dat de werkelijkheid (al dan niet helemaal) wiskundig te beschrijven valt. Ze komen allemaal tot de conclusie dat de wiskunde een zeer bijzondere wetenschap is omdat deze puur en exact is en goed op de werkelijkheid past. Geen van allen kan echter een bewijs geven dat de werkelijkheid an sich wiskundig ís.

Literatuurlijst

Hofstadter, Douglas R.
Gödel, Escher, Bach, een eeuwige gouden band
Vertaling uit het engels
Amsterdam, Contact 1985
Oorspronkelijke uitgave: New York Basic Books 1979

Bor, J. en Teppema, S.
25 Eeuwen filosofie
Meppel, Boom 1985

Russell, B
Mystiek en Logica
Vertaling uit het engels
Katwijk, Service 1986
Oorspronkelijke uitgave: Allen & Unwin 1963

Grayling, A.C.
Russel
Vertaling uit het engels
2e druk
Rotterdam, Lemniscaat 2003
Oorspronkelijke uitgave in samenwerking met Oxford University 1996

Struik, D.J.
Geschiedenis van de wiskunde
1e druk
Utrecht, Het Spectrum 1990
Nederlandse uitgave

Russell, B
Geschiedenis van de westerse filosofie
Vertaling uit het engels
Utrecht,19e druk
Oorspronkelijke uitgave: 1946

Störig, H.J.
Geschiedenis van de filosofie
Vertaling uit het Duits
2 delen
Utrecht, Het Spectrum 1990
21e druk, volledig herzien
1e druk, Nederland 1959

Boey, K.
Ex libris van de filosofie van de 20ste eeuw
1e druk
Leuven Amersfoort, Acco 1999

Nagel, E. Newman, J.R. en Debrot, J.M.
De stelling van Gödel
Vertaling uit het engels
Utrecht, Het Spectrum 1975
Oorspronkelijke uitgave: New York University Press 1958

Irvine, A.D.
Bertrand Arthur William Russell
Engels artikel van internet
www-gap.dxs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Russell.html

Conner, J.J. en Robertson, E.F.
Kurt Gödel
Engels artikel van internet
www-gap.dxs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gödel.html

Auteur onbekend
Kurt Gödel
Engels artikel van internet
www.usna.edu/Users/math/meh/hodel.html

Rooijen-Dijkman, H.W.A. van
Leven en leer van Pythagoras
Vertaling uit het Grieks
Baarm Ambo 1987

Ector, Jef
Filosoferen met Plato
Vertaling uit het Grieks
Antwerpen Standaard 1982

Verhoeven, Cornelis
Mensen in een grot: beschouwingen over een allegorie van Plato
Baarn Ambo 1983

Verschillende auteurs
Van Plato tot Kant
Samengesteld door J.D. Bierens de Haan
Amsterdam: Elsevier 1943

Tummers, P.M.J.E.
Commentaar op Euclides' Elementen der Goniometrie
Nijmegen Ingenium Publishers, 1984

O'Connor, J.J. en Robertson, E.F.
Pythagoras of Samos
Engels artikel van internet
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pythagoras.html

Boyd-Brent, J.
Pythagoras, Music and Space
Engels artikel van internet
http://www.aboutscotland.com/harmony/prop.html

Allan, Don
Pythagoras and the Pythagoreans
Engels artikel van internet
http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/pythag/pythag.html

Auteur onbekend
De elementen van Euclides (overzicht)
Nederlands artikel van internet
http://www.pandd.demon.nl/elementen.htm

Auteur onbekend
Euclides van Alexandrië
Nederlands artikel van internet
http://www.euronet.nl/users/warnar/demostatistiek/meth/euclides.htm

Auteur onbekend
Pythagoras
Engels artikel van internet
www.cristallinks.nl

Wildiers, Max
Tussen intuïtie en weten: 6 grote denkers op het raakvlak tussen exacte en geesteswetenschappen
Muiderberg Dick Coutinho 1982

Auteur onbekend
Pythagoras
Engels én Nederlands artikel van internet
http://www.drury.edu/ess/History/Ancient/Pythagoras.html