Vliegende parkieten

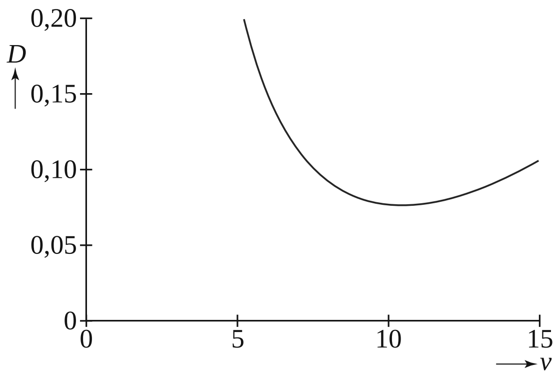
De wetenschapper Vance Tucker heeft onderzocht hoeveel energie een parkiet verbruikt bij het vliegen met verschillende snelheden.

Uit zijn onderzoek blijkt dat de hoeveelheid energie die een parkiet per meter bij een bepaalde snelheid verbruikt, bij benadering berekend kan worden met behulp van de formule

$$D = \frac{6,0}{v^2} + 0,00050v^2 - 0,033$$

Hierbij is D het energieverbruik per meter (in Joule per meter, J/m) en v de snelheid in meter per seconde (m/s). De formule geldt voor $v > 5$.
In de figuur zie je de grafiek die bij deze formule hoort.

figuur



Een parkiet versnelt van 12 m/s naar 15 m/s.

4p **1** Bereken met hoeveel procent D toeneemt.

Als het energieverbruik per meter minder is dan 0,10 J/m, kan een parkiet heel lang blijven vliegen.

4p **2** Bereken bij welke snelheden dit het geval is. Geef je antwoord in meter per seconde in één decimaal nauwkeurig.

De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de **kruissnelheid**. Om de kruissnelheid te berekenen, is de afgeleide van D nodig.

7p **3** Bereken op algebraïsche wijze de kruissnelheid van parkieten in meter per seconde. Rond daarna je antwoord af op één decimaal.

Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 12}$.

De lijn met vergelijking $y = 2x - 5$ en de grafiek van f snijden elkaar niet.

5p **4** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Er bestaat precies één lijn die evenwijdig is aan de lijn $y = 2x - 5$ en die raakt aan de grafiek van f.

7p **5** Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van deze lijn op.

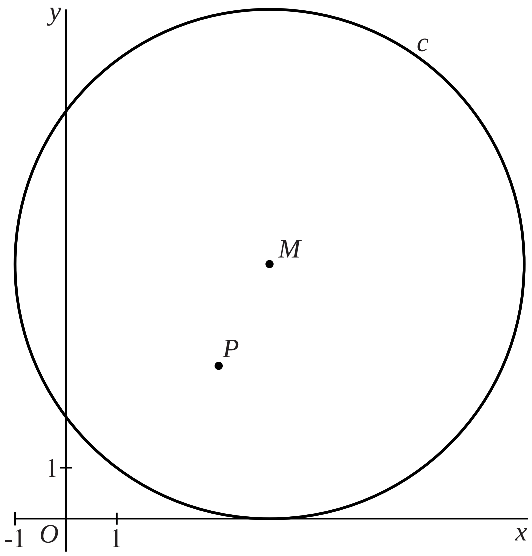
De functie g is gegeven door $g(x) = \sqrt{x}$. De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties na elkaar toe te passen.

3p **6** Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

Een punt binnen een cirkel

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $(x-4)^2+(y-5)^2=25$ en het punt $P(3,3)$. M is het middelpunt van c. Zie figuur 1.

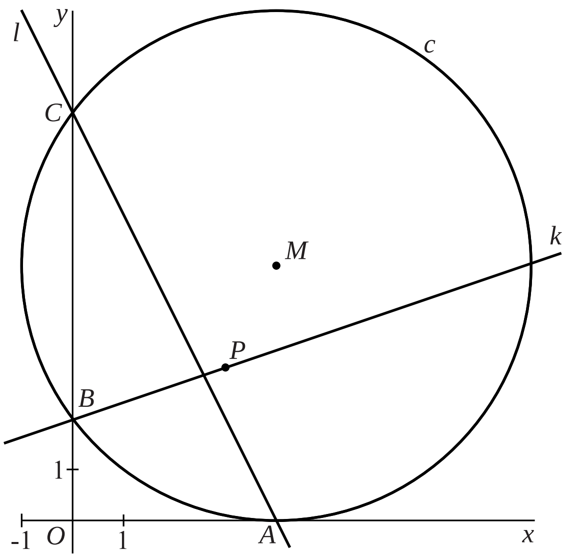
figuur 1



3p **7** Bereken de exacte afstand van punt P tot cirkel c.

Cirkel c raakt de x-as in het punt A en snijdt de y-as in de punten B en C, waarbij C boven B ligt.
Lijn k gaat door B en P en lijn l gaat door A en C. Zie figuur 2.

figuur 2

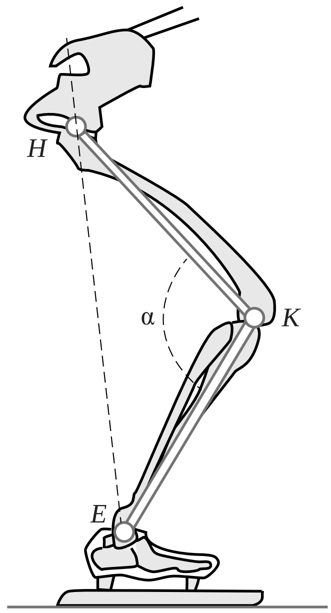


6p **8** Bereken in graden nauwkeurig de scherpe hoek waaronder k en l elkaar snijden.

Schaatshouding

Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.
Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H, het kniegewricht K en het enkelgewricht E.
De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α. Zie de figuur.

figuur



We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser: $HE = 69$ cm en $\alpha = 100°$.

3p **9** Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.

Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

4p **10** Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.
Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken.
Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180°.

foto

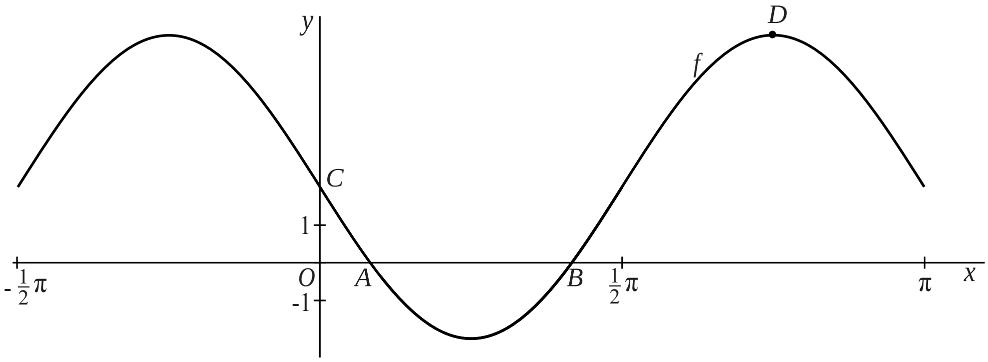
Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt: $HE = \sqrt{3625 - 3600 \cos \alpha}$
Hierbij is α in graden en HE in cm.

4p **11** Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180°. Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.

Sinusoïde

Op het domein $[-\frac{1}{2}\pi, \pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 - 4\sin(2x)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten A en B. Zie de figuur.

figuur



4p **12** Bereken exact de x-coördinaten van de punten A en B.

De grafiek van f snijdt de y-as in punt C. Punt D is een top van de grafiek.
De x-coördinaat van D ligt tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π.

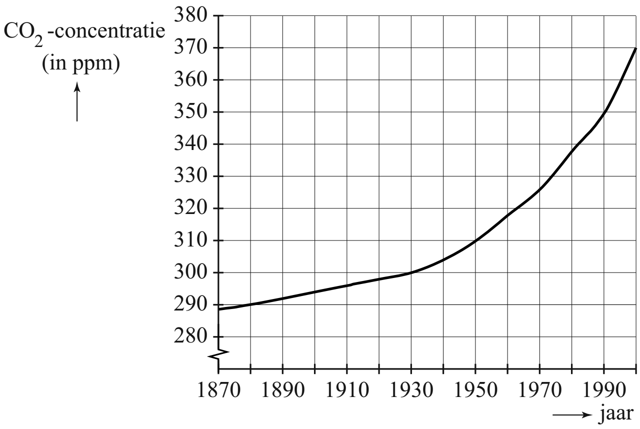
Lijn l gaat door de punten C en D en snijdt de x-as in punt E.

6p **13** Bereken exact de x-coördinaat van punt E.

CO_2

Sinds 1870 meet men de CO_2-concentratie in de atmosfeer. De CO_2-concentratie wordt uitgedrukt in parts per million (ppm). Dit is het aantal CO_2-deeltjes per miljoen deeltjes. In de figuur kun je zien hoe de CO_2-concentratie in de atmosfeer is veranderd in de periode 1870-2000. Deze figuur is vergroot op de uitwerkbijlage weergegeven.

figuur



In het jaar 1900 veronderstelde de latere Nobelprijswinnaar Arrhenius dat de lineaire groei van de CO_2-concentratie zoals die toen al sinds 1880 optrad, zich op dezelfde manier zou voortzetten. Hij voorspelde hiermee hoeveel de CO_2-concentratie tussen 1900 en 2000 zou toenemen. De toename zoals die door Arrhenius is voorspeld, is veel kleiner dan de werkelijke toename tussen 1900 en 2000.

3p **14** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel ppm de door Arrhenius voorspelde toename te klein uitviel.

Na 1930 steeg de CO_2-concentratie sneller dan Arrhenius in 1900 had aangenomen. Een model dat beter past bij de gegevens van 1930 tot 2000 gaat uit van een **natuurlijk niveau** in de CO_2-concentratie met daar bovenop een bijdrage van de mens aan de CO_2-concentratie, de zogeheten **menselijke component**. Wetenschappers hebben kunnen vaststellen dat het natuurlijke niveau al eeuwen rond de 285 ppm schommelt. Voor de menselijke component vanaf 1930 wordt in het model uitgegaan van exponentiële groei.

In 1930 bedroeg de CO_2-concentratie 300 ppm. Hiervan was 285 ppm het natuurlijke niveau en 15 ppm de menselijke component. In 2000 was de CO_2-concentratie gestegen tot 370 ppm. Met behulp van deze gegevens kun je berekenen met hoeveel procent de menselijke component elke 10 jaar volgens het model toeneemt.

4p **15** Bereken deze procentuele toename per 10 jaar. Rond je antwoord af op een geheel aantal procenten.

Een formule die de CO_2-concentratie vanaf 1 juli 1930 goed benadert, is

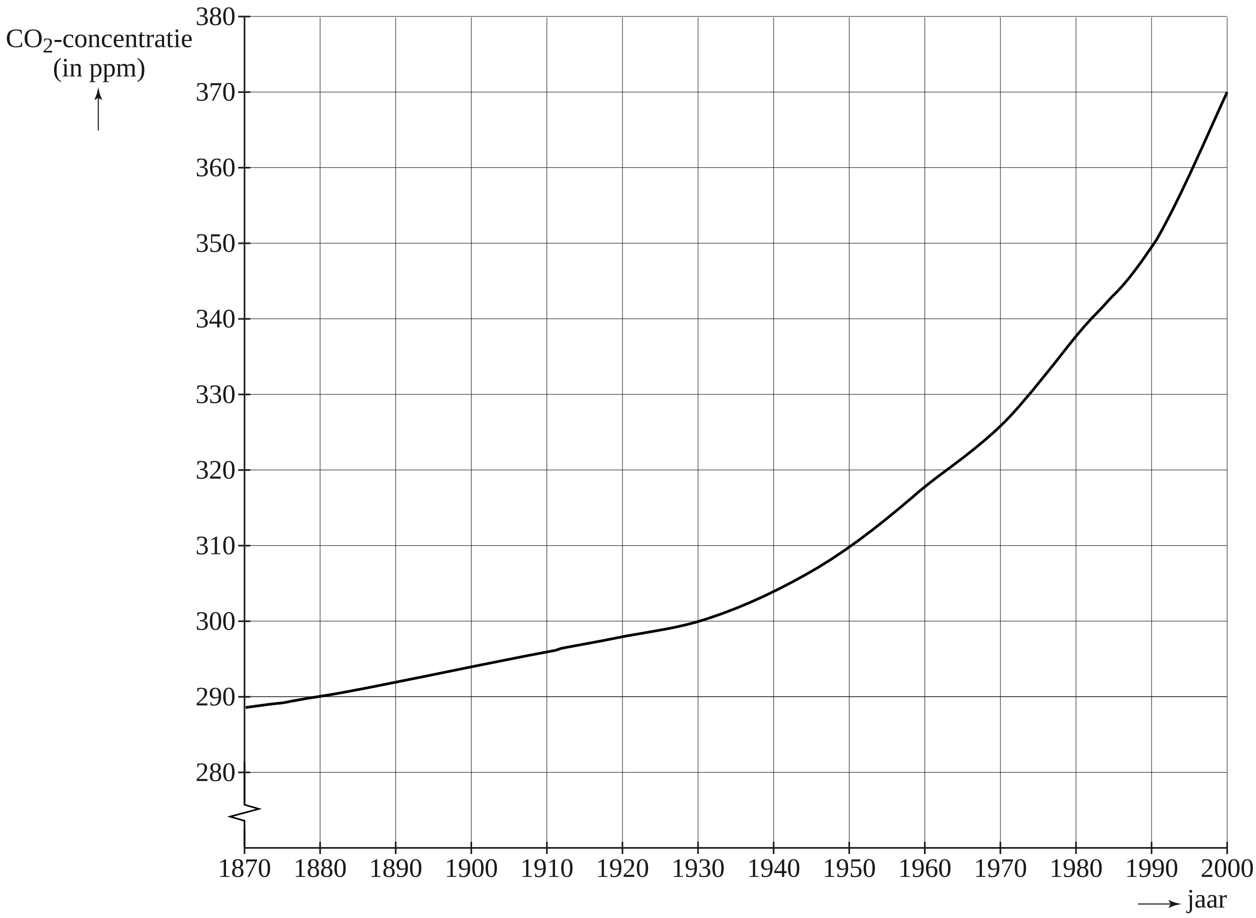
$$C = 15 \cdot 1{,}025^t + 285$$

Hierin is C de CO_2-concentratie in ppm en t is de tijd in jaren na 1 juli 1930.

4p **16** Bereken met behulp van deze formule in welk jaar de menselijke component even groot zal zijn als het natuurlijke niveau.

uitwerkbijlage **HERZIENE VERSIE**

14

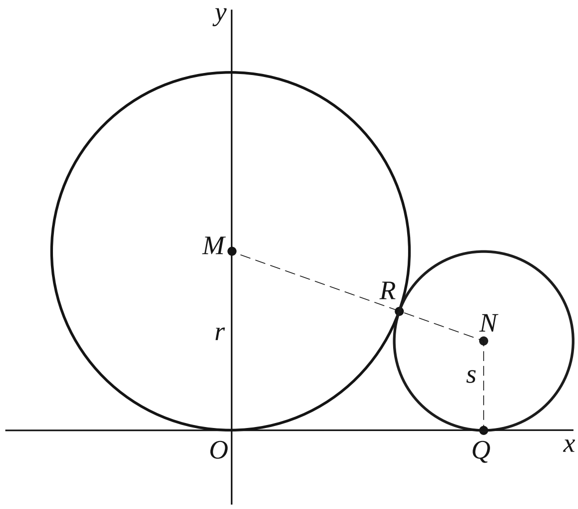


Rakende cirkels

In de figuur zijn in een assenstelsel twee cirkels getekend.
De linker cirkel heeft middelpunt M en straal r. Punt M ligt op de y-as.
De cirkel raakt de x-as in de oorsprong O.
De rechter cirkel heeft middelpunt N en straal s. Deze cirkel raakt de x-as in punt Q.
Er geldt: $r > s$
De cirkels raken elkaar in punt R.

Er geldt: $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$

figuur



4p **17** Toon dit aan.

Bovenstaande formule is te herleiden tot een formule van de vorm $OQ = a\sqrt{rs}$.

3p **18** Bereken de waarde van a.

Neem $r = 4$ en $s = 1$.
Lijn l is de raaklijn aan de beide cirkels in het punt R.

4p **19** Bereken exact de richtingscoëfficiënt van lijn l.