2 Wortel en parabool

4. Om aan te tonen dat de grafieken precies één gemeenschappelijk punt hebben moet je aantonen dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ precies één oplossing heeft. Dit doe je door de vergelijking op te lossen. Eerst kwadrateer je aan beide kanten, dan werk je de haakjes uit, en als laatste vereenvoudig je:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+1} &= x^2+1,\\ x^4+1 &= (x^2+1)^2,\\ x^4+1 &= x^4+2x^2+1,\\ 0 &= 2x^2,\\ 0 &= x^2,\\ 0 &= x.\end{aligned}$$

Er is dus inderdaad precies één oplossing.

5. Eerst reken je de afgeleide van f uit. Hierbij moet je de kettingregel gebruiken:

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^4+1)^{\frac{1}{2}},\\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3,\\ f'(x) &= \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}.\end{aligned}$$

Nu vul je in dat $x = 1$. Dit geeft

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1^3}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

6. Er moeten twee vergelijkingen worden opgelost: $f(x) = 3$ en $g(x) = 3$. De positieve oplossing van $f(x) = 3$ is de x-coördinaat van B, en de positieve oplossing van $g(x) = 3$ is de x-coördinaat van D. Voor $f(x) = 3$ heb je

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+1} &= 3,\\ x^4+1 &= 3^2 = 9,\\ x^4 &= 9-1 = 8,\\ x &= \sqrt[4]{8}.\end{aligned}$$

De vergelijking $g(x) = 3$ geeft

$$\begin{aligned}x^2+1 &= 3,\\ x^2 &= 3-1 = 2,\\ x &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Merk op dat er in beide bovenstaande gevallen ook negatieve oplossingen zijn, maar deze heb je niet nodig voor je antwoord. De lengte van BD is gelijk aan de x-coördinaat van B min die van D, oftewel $|BD| = \sqrt[4]{8} - \sqrt{2}$.