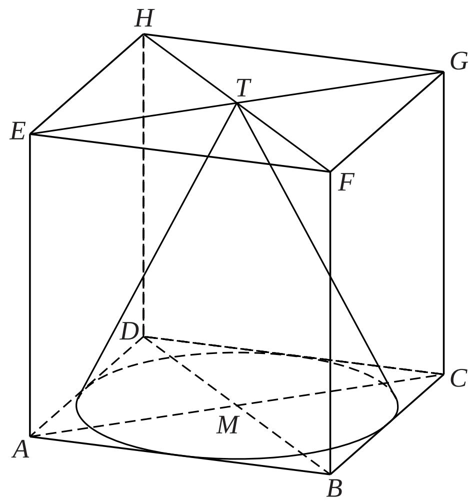
Kegels en kubus

Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 1. In deze kubus passen kegels waarvan de grondcirkel in het grondvlak van de kubus ligt en waarvan de top in het bovenvlak van de kubus ligt. Van deze kegels heeft de kegel waarvan de grondcirkel raakt aan de zijden van vierkant $ABCD$ de grootste inhoud. Zie figuur 1.

figuur 1



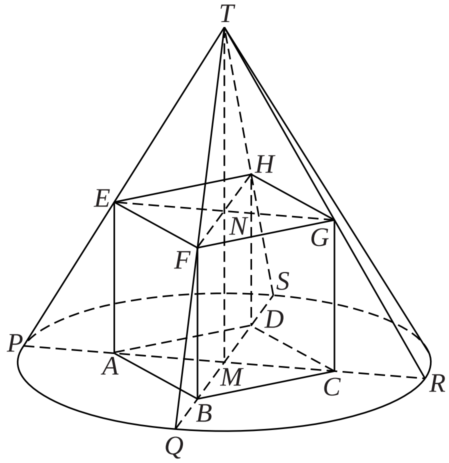
3p **14** Bereken exact de inhoud van de kegel met de grootste inhoud die in de kubus $ABCD.EFGH$ past.

Er zijn ook kegels die **precies** om de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 1 passen. Hiermee bedoelen we dat geldt:

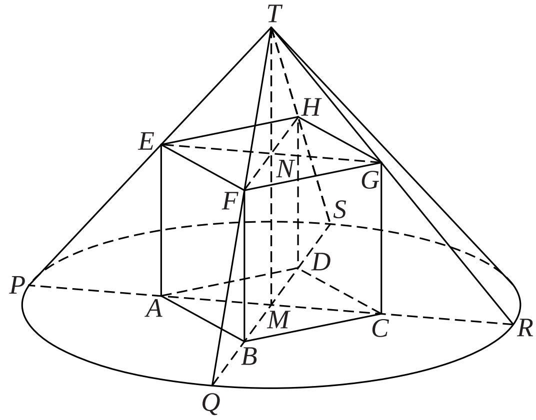
- het grondvlak $ABCD$ van de kubus ligt in het grondvlak van de kegel;
- de hoekpunten E, F, G en H van het bovenvlak van de kubus liggen op de kegelmantel;
- het middelpunt M van de grondcirkel van de kegel ligt recht onder de top T van de kegel.

Zie bijvoorbeeld de figuren 2 en 3.

figuur 2

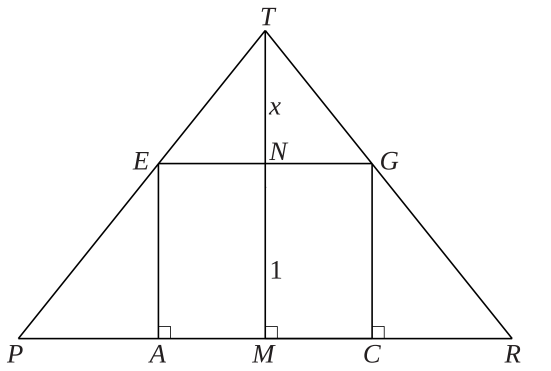


figuur 3



In figuur 4 is een verticale doorsnede door A, C en T getekend.
Het punt N is het snijpunt van MT met het bovenvlak van de kubus.
De afstand van de top T van de kegel tot het bovenvlak van de kubus noemen we x.

figuur 4



De lengte van de straal PM van de grondcirkel van de kegel kan uitgedrukt worden in x. Er geldt:

$$PM = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

4p **15** Leid deze formule af met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken.

Voor de inhoud I van de kegel geldt:

$$I = \tfrac{1}{6}\pi\cdot(x+3+3x^{-1}+x^{-2})$$

Er bestaan twee kegels met inhoud $\frac{4}{3}\pi$ die precies om kubus $ABCD.EFGH$ passen.

4p **16** Bereken de hoogten van deze twee kegels. Rond (indien nodig) je antwoord af op één decimaal.

5p **17** Bereken met behulp van differentiëren de kleinst mogelijke inhoud van een kegel die precies om kubus $ABCD.EFGH$ past.