Windenergie

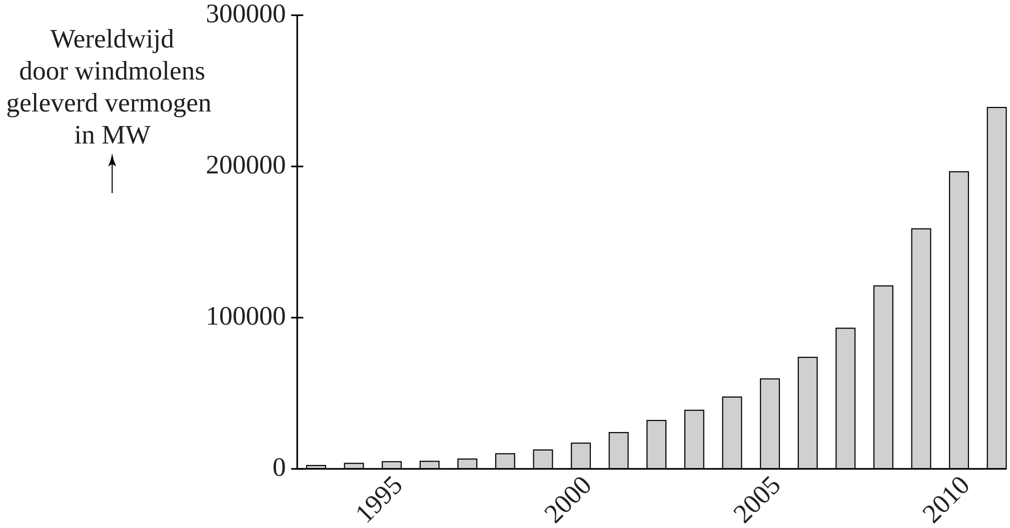
Er wordt steeds meer gebruikgemaakt van windenergie. Hoewel de bijdrage van windenergie nu nog klein is, kan windenergie in de toekomst een grote bijdrage aan onze elektriciteitsvoorziening gaan leveren.
Men voorspelt dat in het jaar 2050 in Nederland 60 000 gigawattuur (GWh) aan windenergie opgewekt zal worden. Dat zal dan 40% tot 50% van de totale behoefte aan elektrische energie in Nederland zijn.

Met behulp van deze gegevens kan worden berekend welke maximale totale behoefte aan elektrische energie in Nederland er voor 2050 wordt voorspeld.

3p **1** Bereken deze voorspelde maximale totale behoefte.

In de figuur is voor de periode 1993 - 2011 de ontwikkeling van het wereldwijd door windmolens geleverde vermogen in megawatt (MW) weergegeven. In deze periode is dit vermogen (bij benadering) exponentieel gegroeid.

figuur



In 1993 was het wereldwijd door windmolens geleverde vermogen 2900 MW. In 2011 was dit 239 000 MW.

4p **2** Bereken in één decimaal nauwkeurig het jaarlijkse groeipercentage van het wereldwijd door windmolens geleverde vermogen dat uit de gegevens volgt.

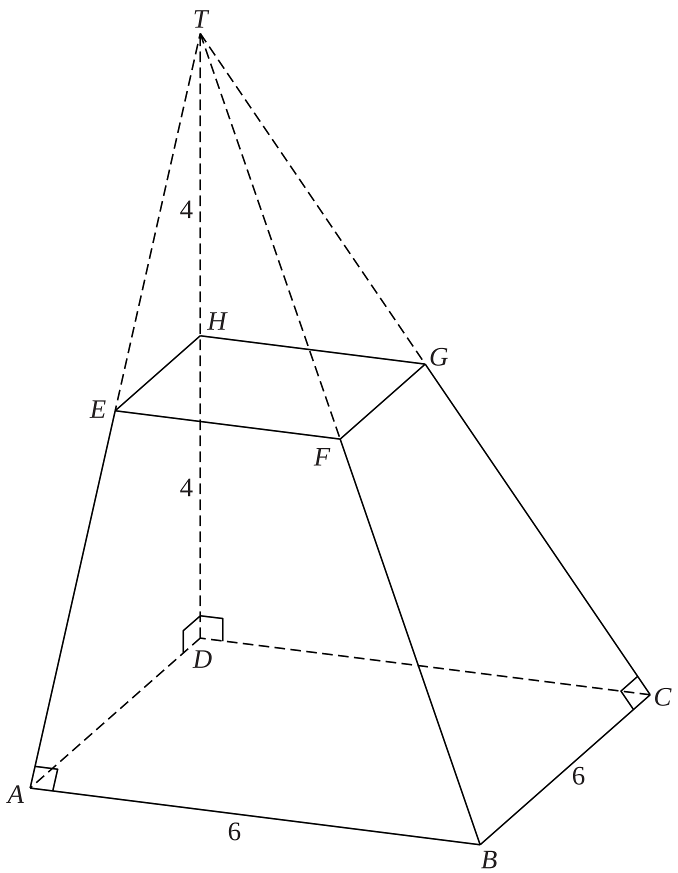
Na 2011 wordt er een jaarlijkse groei van 22% van het wereldwijd door windmolens geleverde vermogen verwacht.

4p **3** Bereken in welk jaar dit vermogen zal zijn verdubbeld ten opzichte van het jaar 2011.

Afgeknotte piramide

Gegeven is de piramide $T.ABCD$. Het grondvlak $ABCD$ van deze piramide is een vierkant met zijde 6. De top T ligt recht boven D. De hoogte van de piramide is dus gelijk aan de lengte van DT. Deze is 8.
De piramide wordt afgeknot op hoogte 4. Hierdoor ontstaat de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$. Zie onderstaande figuur.

figuur



3p **4** Teken het bovenaanzicht van de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$. Zet de letters bij de hoekpunten.

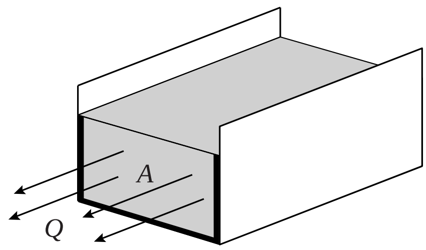
6p **5** Bereken de totale oppervlakte van de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$.

Debiet

Via een rechthoekige goot loost een fabriek koelwater op een rivier.

De hoeveelheid koelwater die per seconde een dwarsdoorsnede van een goot passeert, wordt het **debiet** van de goot genoemd. In figuur 1 is dit uitgebeeld.

figuur 1



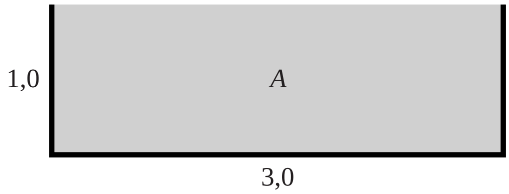
Het debiet van de goot van de fabriek is te berekenen met de formule:

$$Q = 0{,}73 \cdot \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}}$$

Hierbij geldt:
- Q is het debiet in m^3 per seconde;
- A is de oppervlakte van de rechthoekige dwarsdoorsnede van het water in m^2;
- P is de totale lengte van de randen van de dwarsdoorsnede die onder water liggen in m. In figuur 1 zijn deze randen dikgedrukt aangegeven.

De rechthoekige goot waarmee de fabriek het koelwater loost, is 3,0 meter breed en 1,0 meter hoog. In figuur 2 is de dwarsdoorsnede van deze goot getekend bij een maximaal debiet.

figuur 2

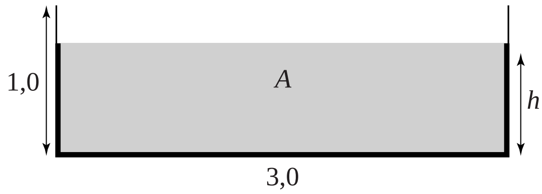


De fabriek loost 5000 m^3 koelwater per uur.

5p **6** Bereken het maximale debiet en leid daaruit af of de goot tijdens deze lozing zal overstromen.

De waterhoogte in de goot noemen we h, met h in m. Zie figuur 3.

figuur 3



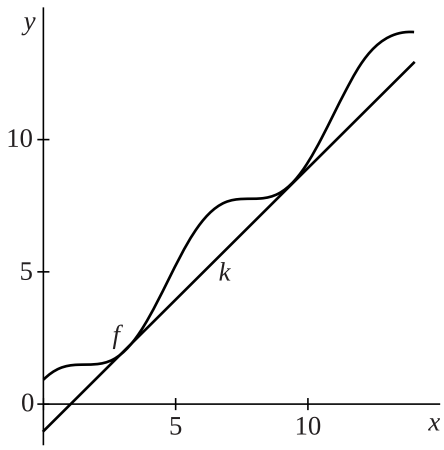
Bij normale lozing stroomt er continu 1,0 m^3 koelwater per seconde door de goot.

5p **7** Bereken in dit geval de waterhoogte in de goot. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

Cosinus met lijnen

De functie f is gegeven door $f(x) = x + \cos x$ en de lijn k is gegeven door $y = x - 1$. In figuur 1 zijn de grafiek van f en de lijn k getekend op het interval $[0, 14]$.

figuur 1

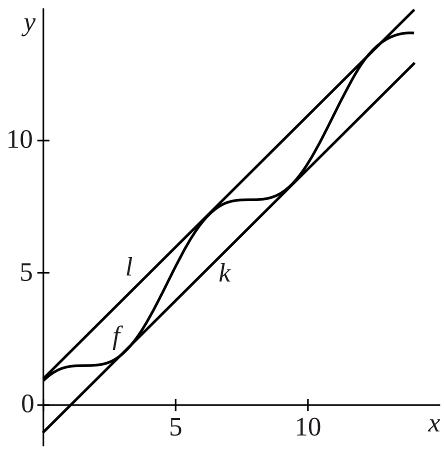


De grafiek van f en de lijn k hebben op het interval $[0, 14]$ twee gemeenschappelijke punten.

3p **8** Bereken exact de coördinaten van deze punten.

In de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de lijn k raakt de lijn k aan de grafiek van f.
In figuur 2 zijn weergegeven de grafiek van f, de lijn k en de lijn l die is gegeven door $y = x + 1$.

figuur 2

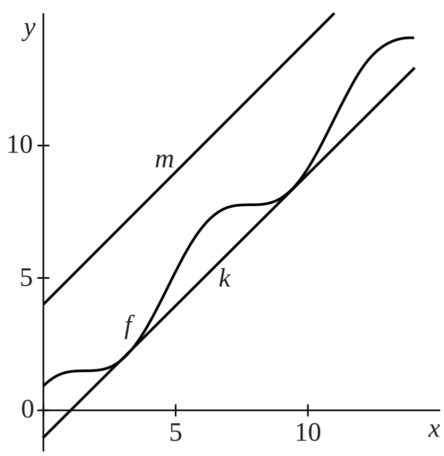


De grafiek van f en de lijn l hebben op het interval $[0, 14]$ drie gemeenschappelijke punten **en** in deze gemeenschappelijke punten raakt de lijn l aan de grafiek van f.

4p **9** Toon dit met behulp van exacte berekeningen en differentiëren aan.

In figuur 3 zijn weergegeven de grafiek van f, de lijn k die is gegeven door $y = x - 1$ en de lijn m die is gegeven door $y = x + 4$.

figuur 3



De functie g is gegeven door $g(x) = x + 1\frac{1}{2} + a \cdot \cos x$.

Voor een bepaalde positieve waarde van a raken de lijnen k en m beide aan de grafiek van g.

3p **10** Onderzoek voor welke positieve waarde van a dit het geval is.

Zuinig inpakken

In deze opgave wordt een balkvormige doos in een rechthoekig vel papier ingepakt. De hoogte van de doos noemen we h, de breedte b en de lengte l. Zie foto 1. Alle maten zijn in centimeter. Er geldt $h \leq b \leq l$.

Het papier wordt eerst strak in de lengterichting om de doos gevouwen. Het papier is zo lang dat twee randen ervan precies tegen elkaar aan komen. Zie foto 2. De lengte van het papier in centimeter is dus $2l + 2h$. Vervolgens wordt het papier aan de voor- en achterkant strak tegen de doos aan gevouwen. Het papier is zo breed dat de randen van het papier precies tegen elkaar aan komen. Zie foto 3. De breedte van het papier in centimeter is dus $b + h$.

foto 1

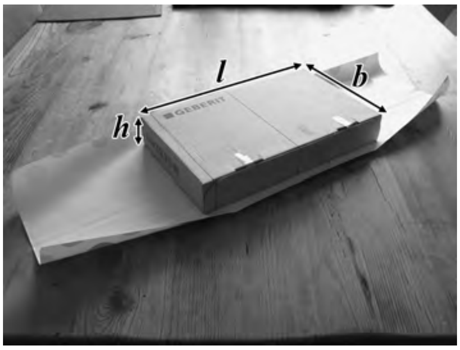


foto 2

foto 3

De oppervlakte van het papier in cm^2 noemen we O.

3p **11** Druk O uit in b, l en h. Werk de haakjes weg.

We vragen ons af hoe groot de maximale inhoud van een balkvormige doos is als we deze op de beschreven manier in een stuk cadeaupapier van 120 cm bij 50 cm verpakken.

Als de doos op deze manier wordt ingepakt, geldt:
$2l + 2h = 120$ en $b + h = 50$.

Met behulp van bovenstaande gegevens is de inhoud I in cm^3 uit te drukken in de breedte b.
Er geldt: $I = b(b+10)(50-b)$

5p **12** Toon dit aan.

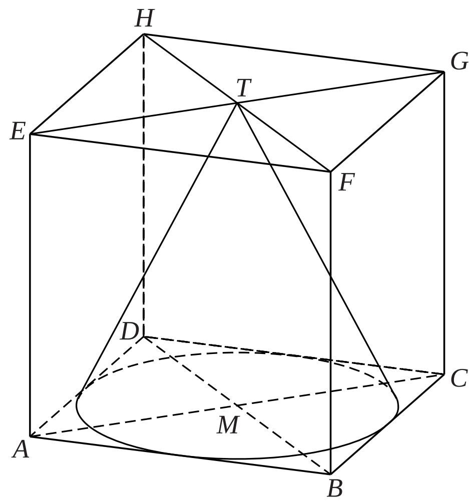
Er is een waarde van b waarvoor I maximaal is.

6p **13** Bereken met behulp van differentiëren de maximale inhoud van een balkvormige doos die met dit stuk papier ingepakt kan worden. Geef je antwoord in cm^3 nauwkeurig.

Kegels en kubus

Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 1. In deze kubus passen kegels waarvan de grondcirkel in het grondvlak van de kubus ligt en waarvan de top in het bovenvlak van de kubus ligt. Van deze kegels heeft de kegel waarvan de grondcirkel raakt aan de zijden van vierkant $ABCD$ de grootste inhoud. Zie figuur 1.

figuur 1



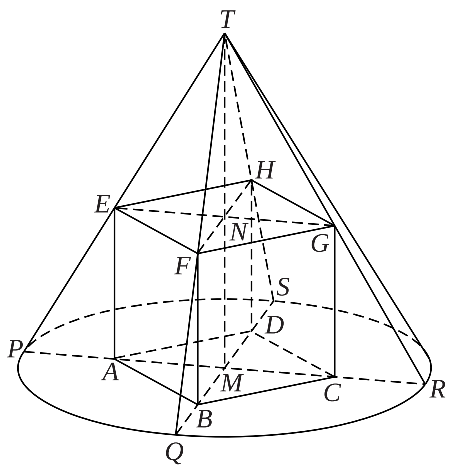
3p **14** Bereken exact de inhoud van de kegel met de grootste inhoud die in de kubus $ABCD.EFGH$ past.

Er zijn ook kegels die **precies** om de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 1 passen. Hiermee bedoelen we dat geldt:

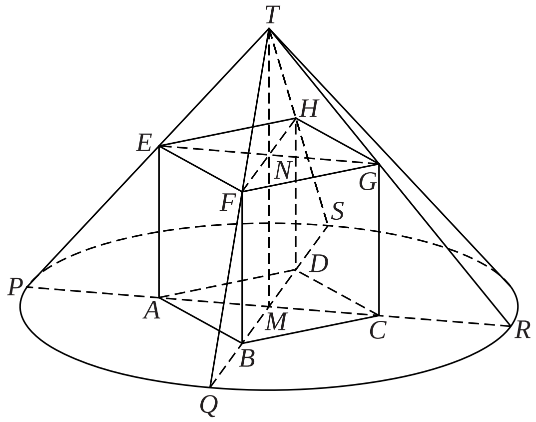
- het grondvlak $ABCD$ van de kubus ligt in het grondvlak van de kegel;
- de hoekpunten E, F, G en H van het bovenvlak van de kubus liggen op de kegelmantel;
- het middelpunt M van de grondcirkel van de kegel ligt recht onder de top T van de kegel.

Zie bijvoorbeeld de figuren 2 en 3.

figuur 2

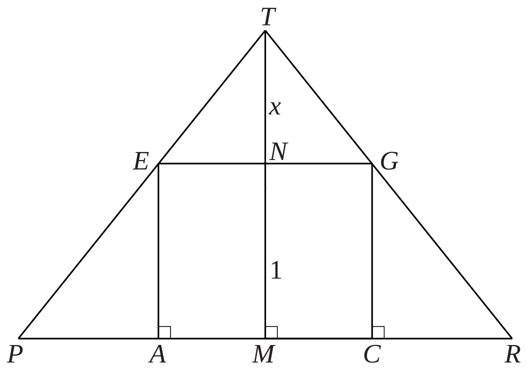


figuur 3



In figuur 4 is een verticale doorsnede door A, C en T getekend.
Het punt N is het snijpunt van MT met het bovenvlak van de kubus.
De afstand van de top T van de kegel tot het bovenvlak van de kubus noemen we x.

figuur 4



De lengte van de straal PM van de grondcirkel van de kegel kan uitgedrukt worden in x. Er geldt:

$$PM = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)$$

4p **15** Leid deze formule af met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken.

Voor de inhoud I van de kegel geldt:

$$I = \tfrac{1}{6}\pi \cdot (x + 3 + 3x^{-1} + x^{-2})$$

Er bestaan twee kegels met inhoud $\tfrac{4}{3}\pi$ die precies om kubus $ABCD.EFGH$ passen.

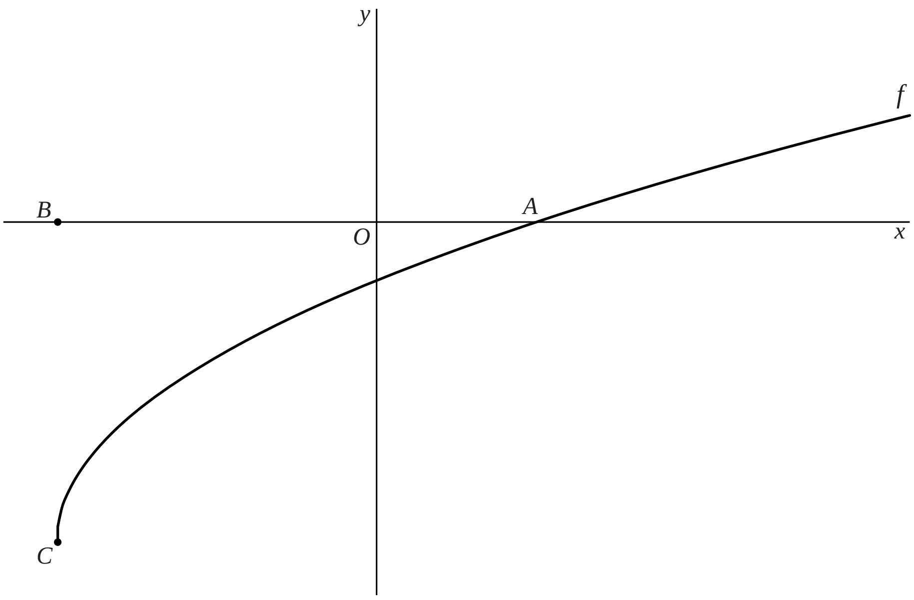
4p **16** Bereken de hoogten van deze twee kegels. Rond (indien nodig) je antwoord af op één decimaal.

5p **17** Bereken met behulp van differentiëren de kleinst mogelijke inhoud van een kegel die precies om kubus $ABCD.EFGH$ past.

Wortel met raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = -3 + \sqrt{2x+6}$. De grafiek van f snijdt de x-as in het punt $A(1\frac{1}{2}, 0)$. Verder zijn gegeven de punten $B(-3, 0)$ en $C(-3, -3)$. Zie onderstaande figuur.

figuur



De helling van de grafiek van f in punt A is $\frac{1}{3}$.

3p **18** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

De raaklijn in A aan de grafiek van f snijdt de lijn BC in het punt S.

4p **19** Toon aan dat S het midden van BC is.