Vetpercentage

Al heel lang onderzoekt men het verband tussen enerzijds het gewicht en de lengte van volwassen mensen en anderzijds hun gezondheid. Hierbij gebruikt men vaak de Body Mass Index (BMI). De BMI wordt als volgt berekend:

$$BMI = \frac{G}{L^2} \text{ met } 1{,}50 \le L \le 2{,}20$$

Hierin is G het gewicht in kilogram en L de lengte in meter.
In tabel 1 zie je hoe bij volwassenen een diagnose wordt gesteld op basis van de BMI.

tabel 1

BMI	**diagnose**
minder dan 18,5	ondergewicht
vanaf 18,5 tot 25,0	normaal gewicht
vanaf 25,0 tot 30,0	matig overgewicht
vanaf 30,0	ernstig overgewicht

Iemand heeft een lengte van 1,90 m en een gewicht van 100 kg. Zijn BMI is 27,7 en daarom wordt de diagnose ‘matig overgewicht’ gesteld.

3p **1** Bereken hoeveel het gewicht van deze persoon minimaal moet dalen om volgens de BMI een ‘normaal gewicht’ te krijgen. Rond je antwoord af op hele kilogrammen.

Voedingsdeskundigen zijn geïnteresseerd in het ideale gewicht van een persoon. Dit ideale gewicht kan op verschillende manieren worden berekend. Als met de BMI-formule wordt gewerkt, gaat men ervan uit dat een BMI van 22,0 overeenkomt met het ideale gewicht.

Een andere manier om het ideale gewicht te bepalen, is door gebruik te maken van de volgende vuistregel:
Het ideale gewicht is 100 keer de lengte in meter verminderd met 110.

Bij een bepaalde lengte is het ideale gewicht volgens beide manieren van berekenen gelijk.

6p **2** Bereken op algebraïsche wijze bij welke lengte dit het geval is. Rond daarna je antwoord af op hele centimeters.

Een hoog vetpercentage levert meer gezondheidsrisico’s op dan een laag vetpercentage. Het vetpercentage is het gewicht van het vetweefsel gedeeld door het totale lichaamsgewicht, maal 100. Om het vetpercentage te bepalen gebruikt men de zogenaamde formule van Siri, die geldt onder voorwaarden waaraan voor de meeste mensen voldaan is. Deze formule luidt als volgt:

$$VP = (\frac{1}{d} \cdot 4{,}95 - 4{,}50) \cdot 100 \text{ met } 0{,}90 \le d \le 1{,}10$$

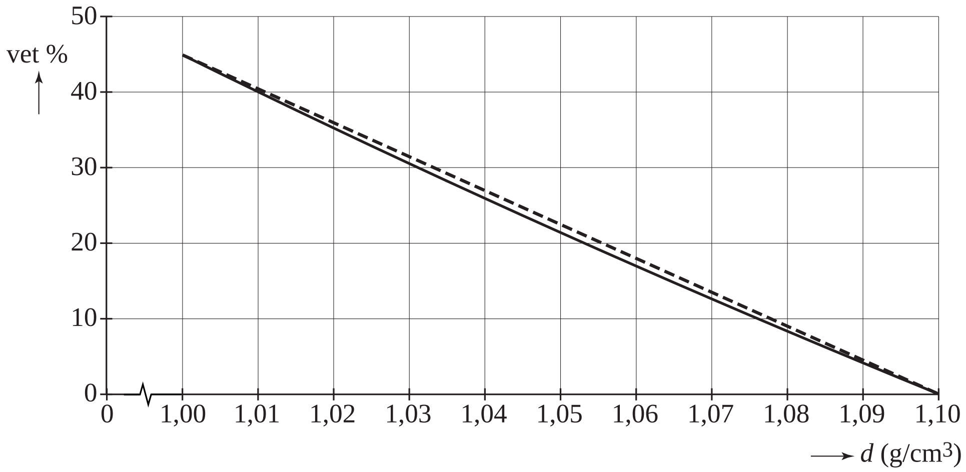
Hierin is VP het vetpercentage en d de dichtheid van het lichaam in g/cm³.

Voor mannen van 20 tot 30 jaar wordt een vetpercentage van 12% als streefwaarde aangehouden.

3p **3** Bereken met behulp van de gegeven formule de dichtheid van het lichaam die hoort bij een vetpercentage van 12%. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Veel mensen hebben een vetpercentage tussen 0 en 45 procent. De dichtheden die daarbij horen, liggen tussen 1,00 en 1,10. In figuur 1 is het gedeelte van de grafiek van VP getekend voor $1{,}00 \le d \le 1{,}10$. In deze figuur is te zien dat de grafiek van VP goed benaderd kan worden door een rechte lijn. Deze rechte lijn door de punten (1,00; 45) en (1,10; 0) is gestippeld getekend.

figuur 1



De vergelijking van deze rechte lijn kan worden geschreven als $VL = p \cdot d + q$.
Hierin is VL het vetpercentage volgens de lineaire benadering en d de dichtheid van het lichaam in g/cm³.

4p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

Bedankt voor je inzet!

Een uitzendbureau heeft voor haar werknemers een aantal cadeaus in een fraaie doos verpakt. Zie de foto.

foto

De bodem $ABCD$ en het deksel $EFGH$ van de doos zijn vierkanten van 18,0 cm bij 18,0 cm. De acht opstaande zijvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met twee zijden van 20,0 cm en één zijde van 18,0 cm.

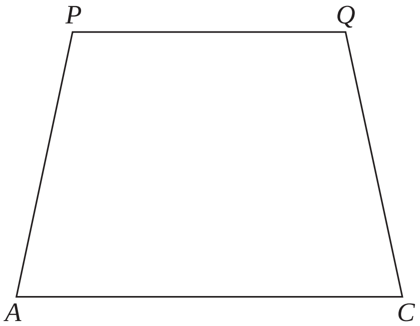
Met de stelling van Pythagoras is te berekenen dat de hoogte van een gelijkbenige driehoek met basis 18 en opstaande zijden 20 exact $\sqrt{319}$ is.

Het uitzendbureau had ook een kubusvormige doos met zijden van 18,0 cm kunnen nemen. Reden om voor de doos van de foto te kiezen zou de mooiere vorm kunnen zijn. Mogelijk is een andere reden dat voor de gekozen doos minder karton nodig is, terwijl de inhoud groter is.

5p **5** Bereken hoeveel procent de totale oppervlakte van de doos op de foto kleiner is dan die van een kubusvormige doos met zijden van 18,0 cm.

Als we de doos verticaal doorsnijden door de diagonaal AC van het grondvlak, krijgen we de doorsnede die is getekend in figuur 1.

figuur 1



In deze doorsnede zijn de punten P en Q de middens van EH en FG. Met behulp van deze doorsnede kun je aantonen dat de hoogte van de doos ongeveer gelijk is aan 17,5 cm.

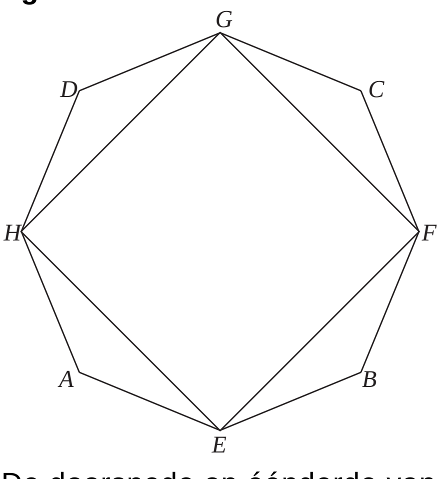
3p **6** Toon dit door berekening aan.

Op de foto is te zien dat de hoek die het vlak AEH met het grondvlak maakt kleiner is dan 90°. Deze hoek is ook te zien in figuur 1.

3p **7** Bereken de hoek tussen het vlak AEH en het grondvlak. Geef je antwoord in gehele graden.

In figuur 2 is een bovenaanzicht van de doos getekend. Het bovenaanzicht van de doos is op de uitwerkbijlage op schaal 1:2 te zien.

figuur 2



De doorsnede op éénderde van de hoogte van de doos gerekend vanaf de bodem $ABCD$ is een achthoek.

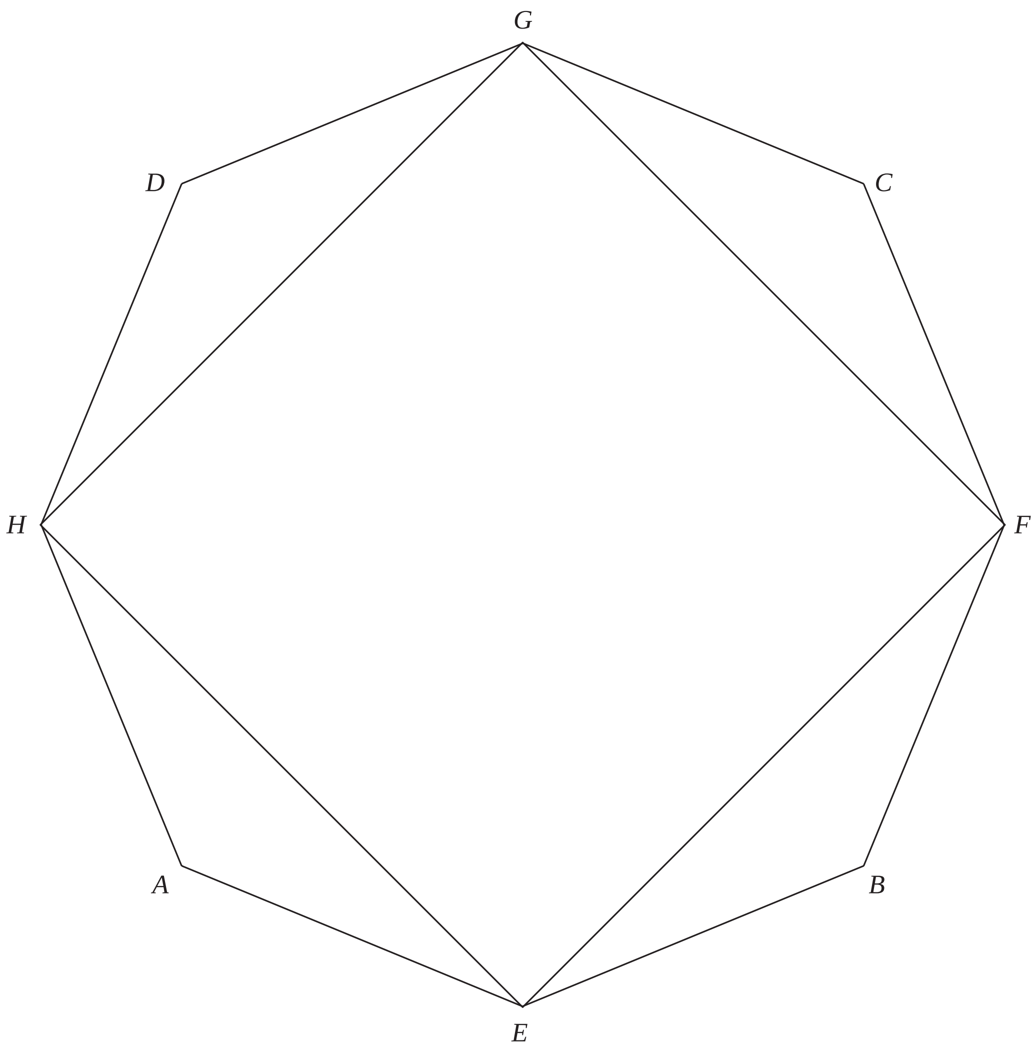
4p **8** Teken op de uitwerkbijlage in het bovenaanzicht van de doos deze doorsnede.

Iemand berekent de inhoud van de doos als volgt:
Hij gaat uit van een recht prisma met de achthoek $AEBFCGDH$ van het bovenaanzicht van figuur 2 als grondvlak. De hoogte van het prisma is 17,5 cm. De doosvorm wordt bereikt door van dit prisma 8 keer een piramide af te halen.

6p **9** Bereken op deze manier de inhoud van de doos.

uitwerkbijlage

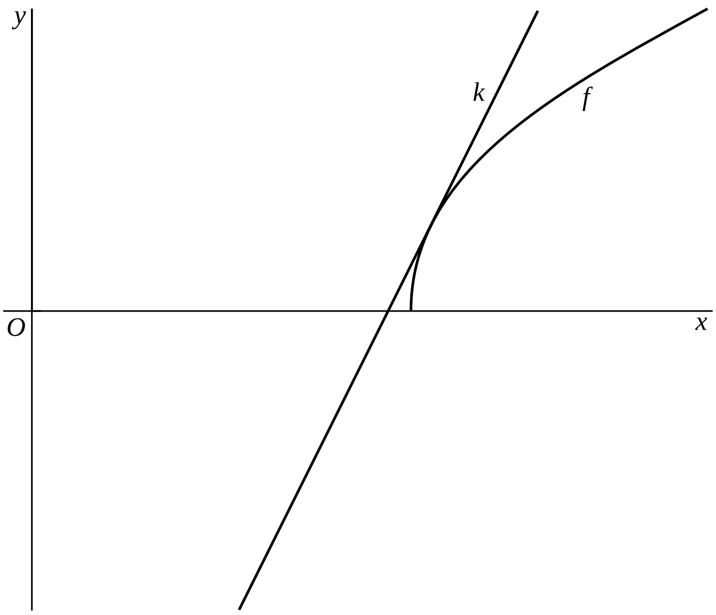
8



Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x-5}$. De lijn k heeft als vergelijking $y = 4x + b$.
Voor een bepaalde waarde van b raakt lijn k de grafiek van f. In figuur 1 zijn deze lijn k en de grafiek van f te zien.

figuur 1



8p **10** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van b.

Diergemeenschappen in Afrika

Er is veel onderzoek gedaan naar de samenstelling van grazende diergemeenschappen in de natuurparken van Afrika. Dergelijke grazende diergemeenschappen worden **gilden** genoemd.
Onderzoek heeft zich onder andere gericht op de gewichten van de diersoorten binnen een gilde. Bij dit onderzoek heeft men de soorten binnen een gilde op volgorde gezet van gemiddeld lichaamsgewicht. De lichtste soort heeft men rangnummer 0 gegeven. De lichtste soort noemen we daarom soort 0, de op een na lichtste soort noemen we soort 1, enzovoort. Je kunt nu de gewichten van elkaar opvolgende soorten vergelijken.
Dit vergelijken gebeurt via de zogeheten **gewichtsratio**. Dat is de verhouding tussen het (gemiddelde) gewicht van volwassen dieren van twee elkaar opvolgende soorten. Als bijvoorbeeld soort 7 een gewicht heeft dat 1,8 keer zo groot is als dat van soort 6, dan is de gewichtsratio tussen deze twee soorten gelijk aan 1,8. Uit dergelijk onderzoek is nu gebleken:

Binnen elk gilde is de gewichtsratio tussen twee elkaar opvolgende diersoorten vrijwel constant.

Dit betekent dat in het gilde van het voorbeeld hierboven geldt: soort 1 is 1,8 keer zo zwaar als soort 0, soort 2 is 1,8 keer zo zwaar als soort 1, enzovoort.

Neem aan dat in een ander gilde de gewichtsratio gelijk is aan 1,35 en dat soort 3 een gewicht heeft van 7,8 kg.

3p **11** Bereken het gewicht van de lichtste soort in dit gilde.

Niet alleen binnen een bepaald natuurgebied is er sprake is van een vrijwel constante gewichtsratio, maar dit geldt ook als men alle grazende diersoorten in geheel Afrika als één diergemeenschap beschouwt. Omdat er in totaal dan meer diersoorten zijn, zal de gewichtsratio voor heel Afrika kleiner zijn dan die voor de afzonderlijke gilden. In tabel 1 staan de gewichten van drie diersoorten met daarbij hun rangnummer in de gewichtsvolgorde van soorten in heel Afrika. Bij de volgende vragen wordt ervan uitgegaan dat de gewichtsratio tussen alle elkaar opvolgende soorten constant is.

tabel 1

soort	**rangnummer in gewichtsvolgorde**	**gewicht (kg)**
hartebeest	71	164
steppezebra	81	286
Kaapse buffel	92	631

3p **12** Bereken de gewichtsratio voor heel Afrika met behulp van de gegevens in de tabel voor hartebeest en Kaapse buffel in twee decimalen nauwkeurig.

Voor diersoorten zwaarder dan de Kaapse buffel blijkt de gewichtsratio niet meer constant te zijn. Onderzoekers denken dat dit komt doordat lang geleden veel zware soorten zijn uitgestorven. De zwaarste grazersoort is momenteel de olifant met rangnummer 95 en een gewicht van 3550 kg.

Neem aan dat vroeger de gewichtsratio in Afrika voor alle elkaar opvolgende soorten constant gelijk aan 1,06 is geweest.

4p **13** Onderzoek hoeveel soorten in de rangschikking tussen de Kaapse buffel en de olifant sindsdien zijn uitgestorven.

Voor dieren in een natuurpark in Oost-Afrika, het Serengeti park, geldt het volgende verband: $\log W = 0,075N + 0,4$.
Hierin is W het lichaamsgewicht van een soort in kg en N is het rangnummer van die soort.
Deze formule kan met behulp van algebra worden omgewerkt tot $W = b \cdot g^N$.

4p **14** Bereken op deze wijze de waarden van b en g. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Een periodieke functie

Gegeven is een periodieke functie g. Het functievoorschrift van g is van de vorm $g(x) = a\sin(b(x+c)) + d$.

De maximale waarde van $g(x)$ is 28. Deze wordt onder andere bereikt als $x = \frac{1}{3}\pi$. De minimale waarde van $g(x)$ is 16. De periode van de functie g is $\frac{1}{2}\pi$.

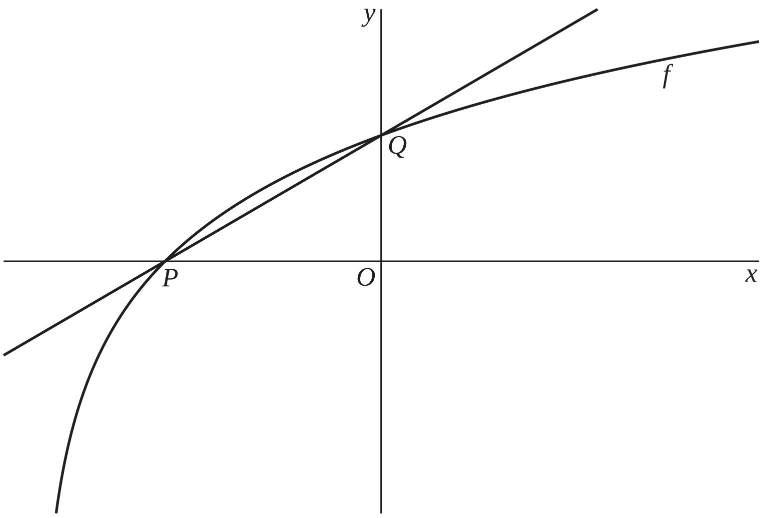
6p **15** Bereken exacte waarden van a, b, c en d.

Natuurlijke logaritme

De functie f is gegeven door $f(x) = \ln(x + \mathrm{e})$.

De grafiek van f snijdt de x-as in punt P en de y-as in punt Q. Zie figuur 1.

figuur 1



De lijn $y = ax + b$ gaat door de punten P en Q.

5p **16** Bereken de waarden van a en b exact.

Punt R ligt op de grafiek van f.

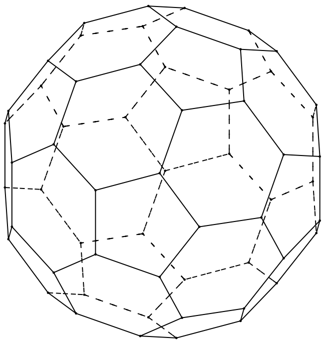
De helling in punt R is gelijk aan $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

4p **17** Bereken de x-coördinaat van punt R exact.

Voetbal

Een afgeknotte icosaëder is een ruimtelijke figuur die bestaat uit 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken. Zie figuur 1. Alle ribben van een afgeknotte icosaëder zijn even lang.

figuur 1

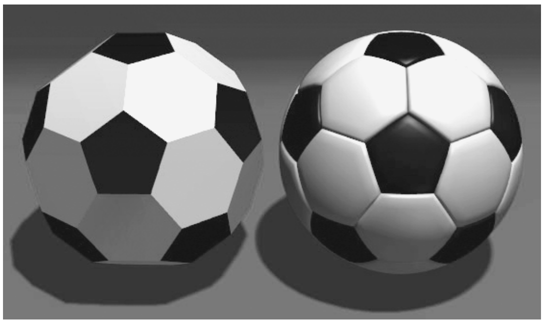


Van een regelmatige vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken zijn 108°. Ook van een regelmatige zeshoek zijn alle zijden even lang. Alle hoeken zijn 120°.

De totale oppervlakte van een afgeknotte icosaëder met ribbe 5 is ongeveer 1815.

6p **18** Toon dit aan.

foto



Een bepaald type voetbal wordt gemaakt van 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken met zijden van 5 cm. Als deze voetbal wordt opgepompt, benadert hij de perfecte bolvorm. Zie de foto. Bij het oppompen gaan de platte vlakken enigszins bol staan. We gaan ervan uit dat de oppervlaktes van de bolvormige voetbal en van de afgeknotte icosaëder met ribbe 5 cm, gelijk zijn.

4p **19** Bereken de diameter van de opgepompte voetbal in centimeter nauwkeurig.