Hoogtetraining

Het was eind vorige eeuw onder topsporters erg populair om enkele weken op grote hoogte te trainen. Vanwege de ijlere lucht worden in een dergelijke trainingssituatie door het lichaam extra rode bloedlichaampjes aangemaakt. De rode bloedlichaampjes zorgen voor het transport van zuurstof in het lichaam. Hoe meer rode bloedlichaampjes aanwezig in het lichaam, hoe beter er gepresteerd zou kunnen worden omdat bij het leveren van zware prestaties veel zuurstof nodig is in de spieren. Inmiddels heeft men ontdekt dat er ook nadelige effecten optreden zodat het netto effect voor de sporter nihil lijkt.

Wanneer de hoogte toeneemt, neemt de luchtdruk af. Deze afname van de luchtdruk verloopt exponentieel. De luchtdruk kan worden gemeten in mm Hg (Hg staat voor kwik).

Op een gegeven moment is op een bepaalde plaats de luchtdruk op zeeniveau (hoogte = 0) gelijk aan 760 mm Hg en op één kilometer hoogte is deze gelijk aan 648 mm Hg. Volgens het exponentiële model is de luchtdruk op 100 meter hoogte vrijwel gelijk aan 748 mm Hg.

4p **1** Toon dit door middel van een berekening aan.

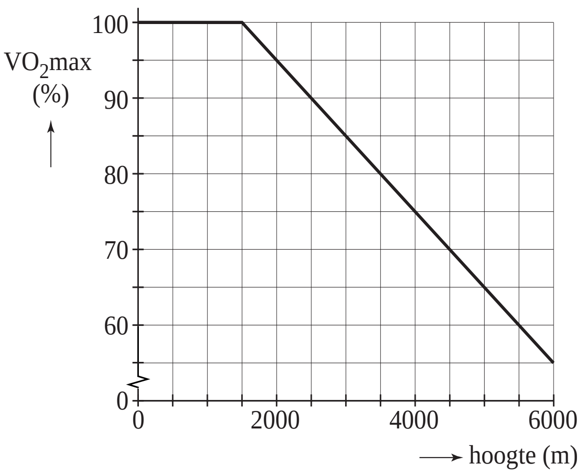
Een andere eenheid om de luchtdruk te meten is hectopascal (hPa).
Er geldt bij benadering dat 1 mm Hg = $\frac{4}{3}$ hPa.
Voor kleine hoogtes, tot ongeveer 100 meter, gebruikt men de volgende vuistregel:
De daling van de luchtdruk bedraagt 1 hPa per 8 meter toename van de hoogte.

4p **2** Bereken in bovengenoemde situatie het verschil tussen de luchtdruk op 100 meter hoogte, berekend volgens de vuistregel, en de waarde volgens het exponentiële model in mm Hg.

Door de verminderde luchtdruk bij toenemende hoogte kan er minder zuurstof worden opgenomen in de longen. De maximale hoeveelheid zuurstof die de longen per minuut kunnen opnemen wordt het maximale zuurstofopnamevermogen ($\mathrm{VO_2max}$) genoemd en wordt gemeten in liter per minuut (liter/min).

In figuur 1 is het verband weergegeven tussen deze $\mathrm{VO_2max}$ en de hoogte. Hierbij is de $\mathrm{VO_2max}$ op zeeniveau gelijkgesteld aan 100%. In figuur 1 is te zien dat vanaf een hoogte van 1500 meter de $\mathrm{VO_2max}$ lineair afneemt en wel met 10% per 1000 meter stijging.

figuur 1



Een wielrenner heeft op zeeniveau een $\mathrm{VO_2max}$ van 5,8 liter/min. Hij traint op de wielerbaan van Mexico City op een hoogte van 2278 meter.

4p **3** Bereken het maximale zuurstofopnamevermogen in Mexico City van deze wielrenner in liter per minuut. Geef je antwoord in 1 decimaal nauwkeurig.

Een atleet wil een bepaald trainingsschema volgen. De hoogte waarop hij gaat trainen is nog niet vastgesteld. Het verband tussen de hoogte en het percentage van zijn $\mathrm{VO_2max}$ dat hij nodig heeft voor dit trainingsschema wordt gegeven door de formule:

$$P = \frac{6000}{115 - 0,01h}$$

Hierin is h de hoogte in meter met $h \geq 1500$ en P het percentage van de $\mathrm{VO_2max}$ van de atleet op hoogte h dat nodig is voor het trainingsschema.

5p **4** Bereken op algebraïsche wijze op welke hoogte het percentage P gelijk is aan 80%.

Voor een atleet is het interessant om te weten op welke hoogte hij moet gaan trainen om een bepaald percentage van zijn $\mathrm{VO_2max}$ te behalen. Hiervoor is het handig om h te schrijven als functie van P.

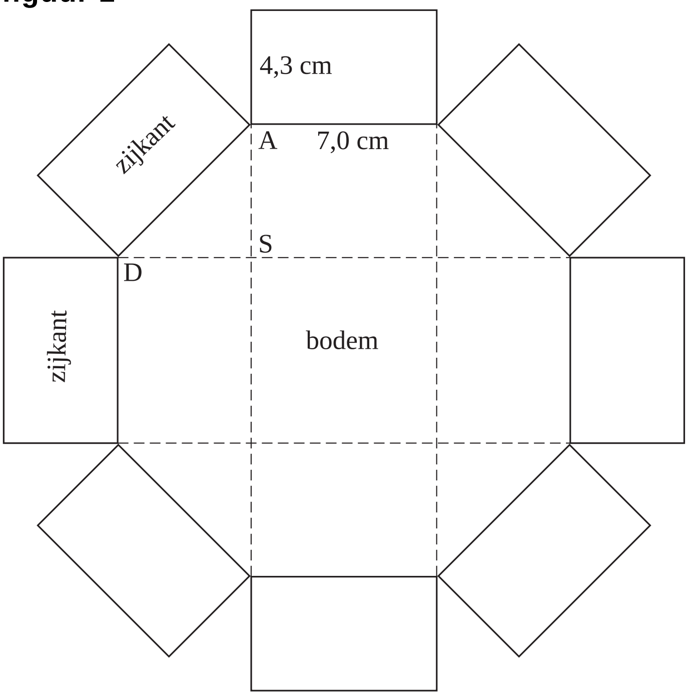
4p **5** Schrijf met behulp van bovenstaande formule h als functie van P.

Kartonnen snoepdoosje

Een kartonnen snoepdoosje heeft de vorm van een recht prisma. Zie foto 1. De boven- en onderkant van dit prisma hebben elk de vorm van een regelmatige achthoek. Alle zijden van de regelmatige achthoek zijn 7,0 cm lang. Het doosje is 4,3 cm hoog. In deze opgave verwaarlozen we de dikte van het karton.

foto 1

figuur 1



In figuur 1 zie je een uitslag van het prisma zonder bovenkant. Op de achthoekige bodem zijn enkele stippellijnen getekend. Er geldt dat $AS = DS$ en $\angle ASD = 90°$.

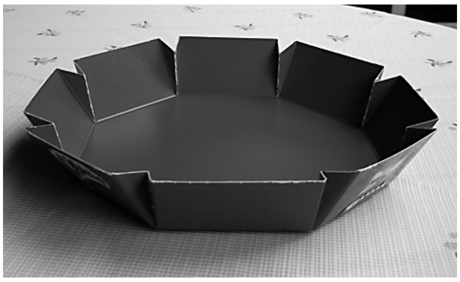
De afstand van punt A tot punt S is ongeveer 4,95 cm.

3p **6** Toon dit met een berekening aan.

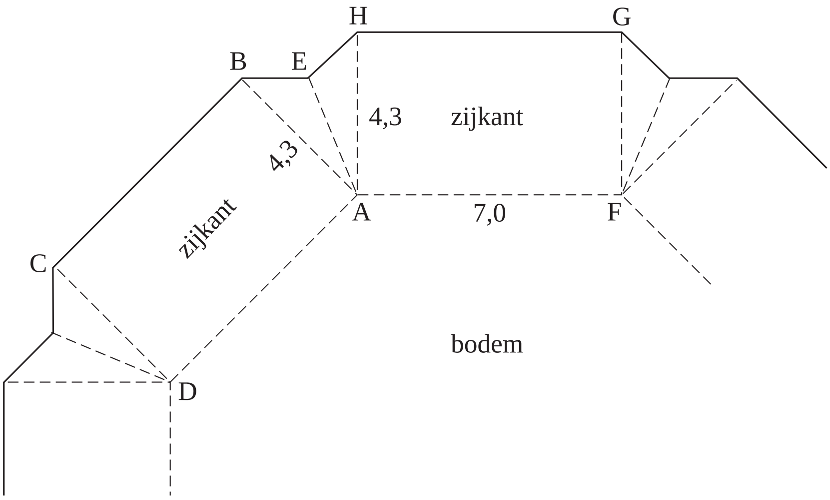
3p **7** Bereken de inhoud van het doosje.

Als het deksel van het doosje gehaald wordt, gaan de zijkanten van het doosje naar buiten staan. Zie foto 2. In werkelijkheid wordt het doosje dus niet gemaakt van een uitslag zoals in figuur 1. In figuur 2 is op schaal 1:2 een gedeelte te zien van het doosje als het nog een plat stuk karton is.

foto 2



figuur 2

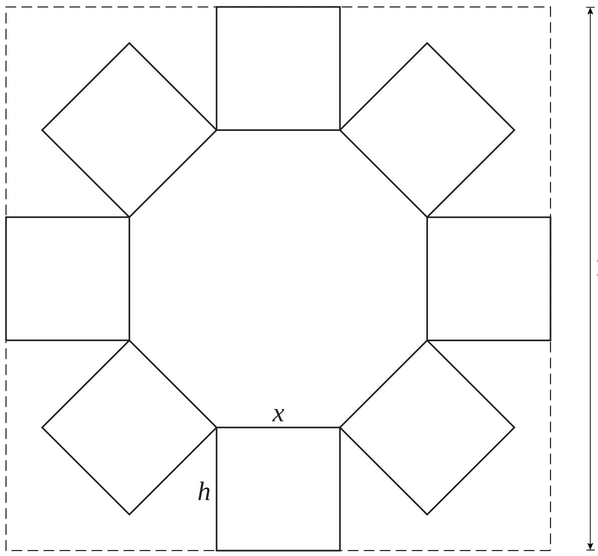


Om het doosje te maken, wordt het karton langs de stippellijnen gevouwen. Als het deksel erop zit, staan de zijkanten van het doosje loodrecht op het grondvlak. De vouwlijnen AB en AH komen dan tegen elkaar aan. De vouwlijn AE steekt daarbij naar binnen.
Als het deksel eraf gehaald wordt, maken de zijkanten van het doosje een hoek van 60º met het grondvlak. Van deze situatie is een bovenaanzicht te tekenen. Vanwege de symmetrie bekijken we slechts een gedeelte hiervan met de twee zijvlakken $ABCD$ en $AFGH$, en de driehoeken AEB en AHE. Op de uitwerkbijlage is op ware grootte een begin gemaakt met het bovenaanzicht.

4p **8** Voltooi dit deel van het bovenaanzicht door de genoemde ontbrekende delen te tekenen. Licht je werkwijze toe.

De fabrikant wil een kleiner doosje ontwerpen, eveneens in de vorm van een regelmatig achthoekig prisma. Hij wil dat de uitslag van dit doosje zonder deksel precies past op een vierkant stuk karton van 18,0 bij 18,0 cm. In figuur 3 is hiervan een voorbeeld te zien.

figuur 3



De zijden van de achthoekige bodem kunnen kleiner of groter genomen worden. De hoogte van het doosje verandert dan ook. Noem de zijde van de regelmatige achthoek x. Dan geldt voor de oppervlakte O van de achthoek en voor de hoogte h van het doosje:

- $O = 2(1+\sqrt{2})x^2$
- $h = 9{,}0 - \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})x$.

Voor de inhoud van het doosje (als het deksel er op zit) geldt $I = O \cdot h$. Hiermee en met bovenstaande formules voor O en h kan worden aangetoond dat bij benadering geldt: $I = 43{,}46x^2 - 5{,}83x^3$.

4p **9** Leid op algebraïsche wijze de formule voor de inhoud I af met behulp van de formules voor O en h.

4p **10** Bereken met behulp van differentiëren de maximale inhoud van het doosje. Geef je antwoord in hele cm^3 nauwkeurig.

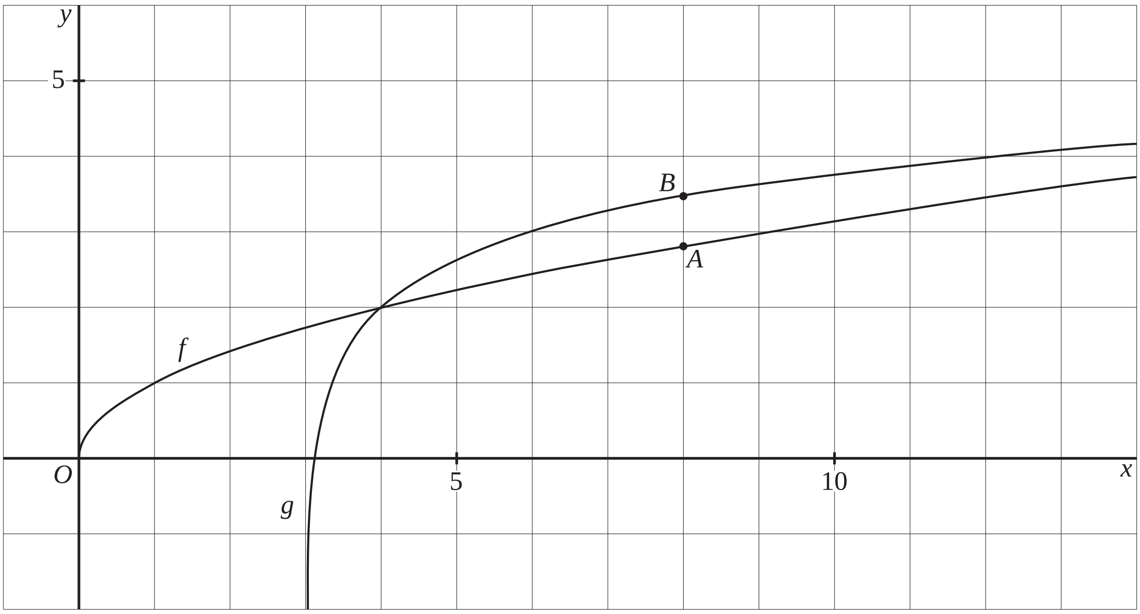
uitwerkbijlage

8

Wortel en logaritme

In onderstaande figuur zie je twee grafieken getekend. Het functievoorschrift van f is $f(x)=\sqrt{x}$ en het functievoorschrift van g is $g(x)=2+{}^{3}\log(x-3)$.

figuur



3p **11** Bereken exact de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van g met de x-as.

A is een punt op de grafiek van f en B is een punt op de grafiek van g. De x-coördinaat van zowel A als B is 8. Zie de figuur.
De raaklijn aan de grafiek van f in punt A en de raaklijn aan de grafiek van g in punt B lopen vrijwel parallel. Dit betekent dat de helling van de grafiek van f in punt A bijna gelijk is aan de helling van de grafiek van g in punt B. Er is een waarde van x waarvoor geldt dat $f'(x)=g'(x)$.

5p **12** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van x in 1 decimaal nauwkeurig.

De twee grafieken snijden elkaar in precies twee punten.

4p **13** Los op: $g(x)<f(x)$.

Kerstlicht

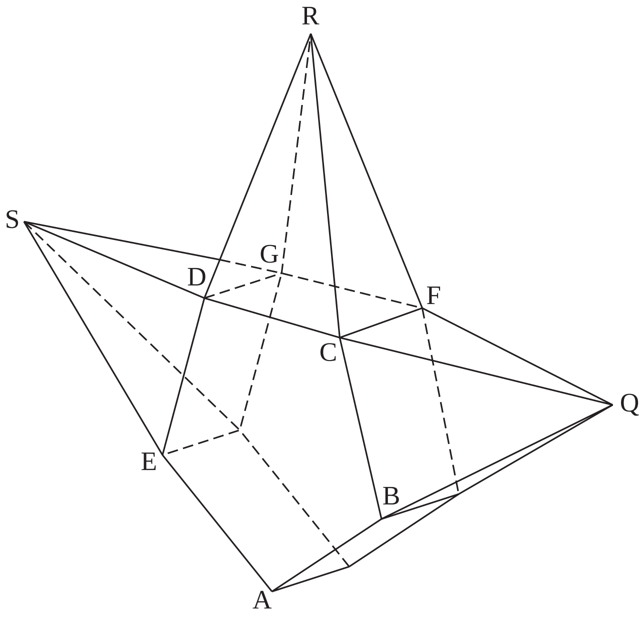
In een warenhuis is rond Kerstmis allerlei kerstverlichting te koop, zoals het kerstlicht dat op de foto is te zien.

foto

Dit kerstlicht bestaat uit een vijfzijdig prisma, waarbij op de rechthoekige zijvlakken vierzijdige piramides zijn geplaatst.

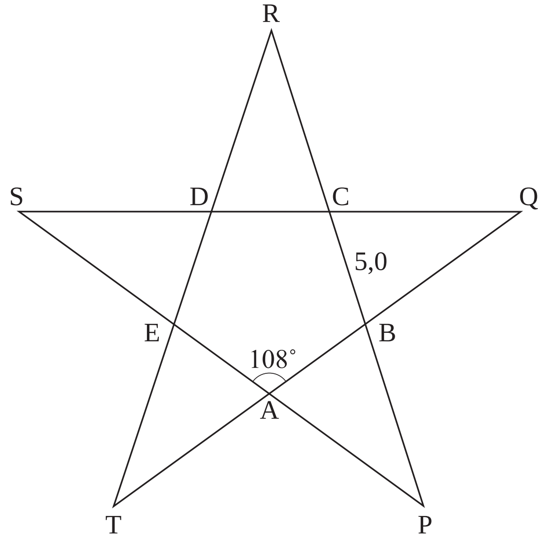
Een gedeelte van het kerstlicht, het vijfzijdig prisma met drie van de vijf piramides, is in figuur 1 weergegeven.
De twee vijfhoekige zijvlakken van het prisma zijn regelmatige vijfhoeken met zijden van 5,0 cm. De grondvlakken van de piramides zijn rechthoeken met zijden van 5,0 en 3,0 cm. De opstaande ribben van alle piramides zijn even lang. Zie figuur 1.

figuur 1



Het vooraanzicht van het kerstlicht is een vijfpuntige ster. Dit vooraanzicht is te zien in figuur 2.

figuur 2



In het vooraanzicht zijn P, Q, R, S en T de snijpunten van de verlengde zijden van de regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoeken in de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ zijn allemaal 108º.
Hieruit volgt dat de hoeken van de sterpunten, zoals bijvoorbeeld $\angle DRC$, allemaal 36º zijn.

3p **14** Toon dit laatste aan.

De zijden van de regelmatige vijfhoek $ABCDE$ zijn 5,0 cm. In het vooraanzicht zijn de lijnstukken die de punten P, Q, R, S en T met de hoekpunten van deze regelmatige vijfhoek verbinden, zoals bijvoorbeeld RD, RC en TE, allemaal even lang. De lengte van elk van deze lijnstukken in het vooraanzicht is ongeveer 8,1 cm.

4p **15** Toon dit met een berekening aan.

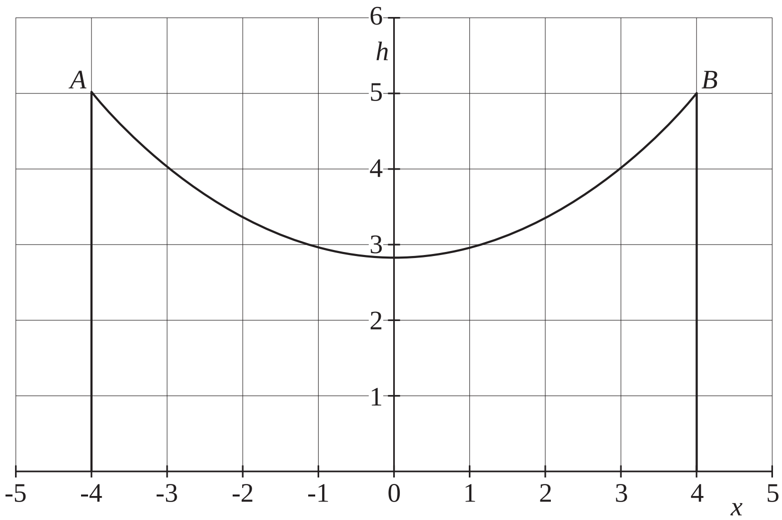
De opstaande ribben van alle piramides van het kerstlicht zijn even lang.
4p **16** Bereken de lengte van de opstaande ribben van de piramides.

Het kerstlicht wordt liggend verpakt in een cilindervormig doosje waar het precies in past. Dit doosje heeft een hoogte van 3,0 cm. De punten van de ster liggen tegen de opstaande randen van het doosje aan.
7p **17** Bereken de diameter van het grondvlak van het doosje. Geef je antwoord in cm in 1 decimaal nauwkeurig.

Kettinglijn

Als we een vrij hangend, volkomen buigzaam, overal even dik en even zwaar touw tussen twee punten A en B ophangen, dan hangt het touw in een gebogen lijn. Deze lijn wordt een kettinglijn genoemd.
We bekijken een kettinglijn waarbij de punten A en B zich beide 5 meter boven de grond bevinden op een afstand van 8 meter van elkaar. We brengen in het verticale vlak waarin het touw hangt, een assenstelsel aan zo dat het laagste punt van het touw op de y-as ligt en de x-as horizontaal langs de grond loopt. In het assenstelsel in figuur 1 heeft A de coördinaten (–4,5) en B de coördinaten (4,5).

figuur 1

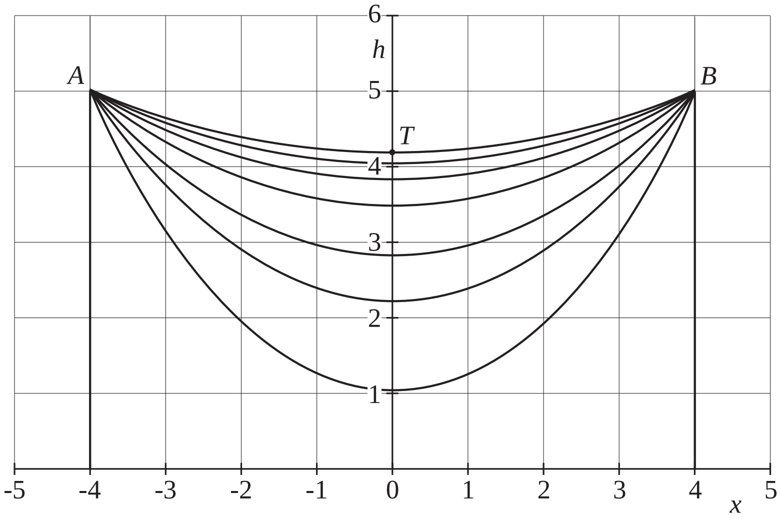


De kettinglijn in figuur 1 is dan de grafiek van de functie $h(x) = 2(e^{\frac{1}{4}x} + e^{-\frac{1}{4}x}) + c$ met h en x in meter.

3p **18** Bereken de exacte waarde van c.

Als men touwen van verschillende lengte ophangt tussen A en B, dan zal het langste touw het verste doorhangen. In figuur 2 is een aantal touwen van verschillende lengte te zien. Hier is ook te zien dat het kortste touw het hoogste hangt.

figuur 2



Het is duidelijk dat hoe hoger het touw hangt, hoe kleiner de helling is in punt B. Bij de bovenste kettinglijn in figuur 2 met als laagste punt T hoort de formule $h_T(x) = 5(e^{0,1x} + e^{-0,1x}) - 5,81$.

4p **19** Bereken van deze kettinglijn met behulp van differentiëren de helling in punt B. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

In figuur 2 zie je zeven kettinglijnen. Deze kettinglijnen lijken op dalparabolen. De functievoorschriften voor deze dalparabolen hebben de vorm: $f(x) = ax^2 + b$. Voor de dalparabool die door de punten A, B en T gaat, geldt dat $a = 0,050625$ en $b = 4,19$.

3p **20** Toon dit door middel van een berekening aan.

Hoewel de kettinglijnen uit figuur 2 lijken op dalparabolen, zijn ze dat niet. Zo valt bijvoorbeeld de kettinglijn gegeven door de formule van $h_T(x)$ niet samen met de dalparabool gegeven door de formule van $f(x)$ met $a = 0,050625$ en $b = 4,19$. De verticale afstand tussen de grafieken kan berekend worden met de verschilfunctie $v(x) = f(x) - h_T(x)$.

3p **21** Bereken de maximale waarde van $v(x)$ op het interval [–4, 4] in 3 decimalen nauwkeurig.

Het functievoorschrift voor een willekeurige kettinglijn door de punten A en B wordt gegeven door:

$$h(x) = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx} - e^{4k} - e^{-4k}) + 5 \text{ waarbij } -4 \leq x \leq 4.$$

Hierin is k een constante die afhangt van de lengte van de ketting. Er wordt een ander touw opgehangen tussen A en B. Het laagste punt van dit touw valt precies samen met (0,0).

4p **22** Bereken de waarde van k van dit touw in 2 decimalen nauwkeurig.